

El uso de técnicas científicas con fines operativos se remonta a la antigüedad. Así sería Arquímedes el primero en practicar la Investigación Operacional cuando concentrando la energía solar mediante espejos habría logrado incendiar los navíos romanos, durante el sitio de Siracusa.

Con el objeto de mejorar la operabilidad del ejército de Baviera, Benjamín Thompson, conde de Runford, estudió y logró la elección de la tela óptima para la ropa de los soldados. También se ocupó del problema de su alimentación con vistas a reducir su costo.

Riquet, en 1662 presentó un plan, basado en pruebas efectuadas sobre modelos reducidos, que permitió construir en 15 años, a partir de 1666, el Gran Canal del Languedoc, Francia, canal de 240 Km de longitud y que vincula el Atlántico con el Mediterráneo.

A pesar de éstos y otros ejemplos históricos, se reconoce como fecha de nacimiento de la Investigación Operacional, la víspera de la Segunda Guerra Mundial. Al decir de Churchmann, ninguna ciencia ha nacido en un día determinado; emerge por la convergencia de un creciente interés en determinados problemas y por el desarrollo de métodos científicos, técnicas y herramientas que resultan adecuadas para resolverlos.

Proyecto de gestión  
Integrada y Plan  
Maestro de la Cuenca  
del Rio Pilcomayo  
**BIBLIOTECA**

Emir Ibarra

# INTRODUCCION A LA INVESTIGACION OPERATIVA

Ediciones Marymar



SE ~ 023



## COLECCION CIENCIA Y TECNOLOGIA

Director: Prof. Ing. Marcelo Mesny

### *Títulos publicados*

Algebra Booleana - Wolf, Buchholz, Spiech y Shleuder  
Termodinámica - Melvin Mark  
Prácticas de metalografía - Dr. Eduardo J. Dubox  
Curso básico de estática - Ing. Aarón Helfgot  
Introducción a la metalurgia - Ing. Eduardo R. Abril  
Metalurgia - Ing. Eduardo R. Abril  
Electrotecnia - Ing. Armando R. Isernia  
Curso básico de resistencia de los materiales - Ing. Aarón Helfgot  
Instalaciones eléctricas - Ing. Marcelo A. Sobrevila  
Matemática básica - José Antonio Petrocelli  
Circuitos eléctricos y magnéticos - Ing. Marcelo A. Sobrevila  
Electrónica del estado sólido - Ing. Angel Tremosa  
Generación del vapor - Ing. Marcelo Mesny  
Introducción a la investigación operativa - Ing. Emir Ibarra

### *Títulos en preparación*

Nociones de fiabilidad - Ing. Emir Ibarra  
Ensayo de materiales - Ing. Aarón Helfgot

### *Serie Máquinas Térmicas*

- |                    |                                        |
|--------------------|----------------------------------------|
| Marcelo Mesny      | 1. Generación del vapor                |
|                    | 2. Motores Diesel                      |
|                    | 3. Motores de nafta                    |
|                    | 4. Turbinas de gas                     |
|                    | 5. Turbinas de vapor                   |
| Roberto A. Cubillo | 6. Ciclos de más máquinas frigoríficas |
|                    | 7. Máquinas frigoríficas               |
| Marcelo Mesny      | 8. Transmisión del calor               |

## EMIR IBARRA

Profesor en las Universidades Nacionales  
de La Plata, Mar del Plata y del Centro

# INTRODUCCION A LA INVESTIGACION OPERATIVA



Ediciones Marymar

La reproducción total o parcial de este libro en forma idéntica o modificada, escrita a máquina por el sistema "multigraph", mimeógrafo, impreso, etc., no autorizada por los editores, viola derechos reservados. Cualquier utilización debe ser previamente solicitada.

658

Ibarra, Emir

Introducción a la investigación operativa. Buenos Aires,

Marymar, 1976

140 p. 23 cm. (Col. Ciencia y Tecnología)

1. ADMINISTRACION DE EMPRESAS I. Título

*Dedicado a mi esposa Martha Raquel  
y a mis hijos: María Marta  
y Carlos Emir.*

© by Marymar Ediciones, S.A.

Chile 1432 - Buenos Aires

Todos los derechos reservados

Primera edición: 1976

Queda hecho el depósito que establece la ley 11.723

Impreso en Argentina

Printed in Argentina

En recuerdo de mis Padres y como modesto homenaje a la memoria de mi querido Maestro, el Dr. Georges M. J. Dedebant, quien al decir de sus alumnos . . . ha dejado un poco de sí mismo, en cada lugar, y en todo momento.

## AGRADECIMIENTOS

Los temas que se exponen en este texto constituyen una parte del contenido de las asignaturas "Investigación Operativa" y "Técnicas Cuantitativas" que dictamos, respectivamente, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, y en las facultades de Ingeniería y de Ciencias Económicas, de la Universidad Provincial de Mar del Plata.

Este libro tuvo su origen en notas y apuntes de clases que utilizamos en el aula. Las observaciones, las críticas, las muestras de aliento, es decir, la cooperación de mis alumnos y de mis colaboradores en la cátedra, nos han decidido a publicarlo.

Es por ello que no puedo dejar de mencionar a:

Prof. Nora Scheggia  
Ing. Pascual H. Chiapparroni  
Ing. Jorge Puleio  
Ing. Gustavo Ravbar  
Ing. Hugo Rouillet

y muy especialmente a la Prof. Licenciada Stella Maris Valiente, por su inestimable colaboración, quienes de este modo se convierten en coautores del presente trabajo.

Al Ing. Marcelo Mesny, mi sincero agradecimiento por los reiterados estímulos de él recibidos, y que permitieron la publicación de esta obra.

El libro no tiene otra pretensión que servir de "guía" para iniciarse en esta disciplina, ... en esta actitud mental. Esperamos que resulte una buena "invitación" a la Investigación Operacional.

Emir IBARRA

Quilmes, Setiembre de 1974.-

## PLAN DE LA OBRA

Conocemos los problemas de la cátedra. Sabemos que un apunte, por regular que sea, mejora el resultado del sistema educando-educador, al aclarar las reglas del juego.

Este libro está especialmente dirigido a nuestros alumnos de ingeniería y de ciencias económicas. Esperamos que sea un texto de introducción, un manual que les de una visión general y los motive a profundizar esta gran aventura del pensamiento.

En esta entrega que consta de dos títulos hemos incluido los temas que, a nuestro juicio, son más recientes y además más promisorios. Esperamos que en próximos volúmenes de esta misma Serie iremos complementando los otros temas que cubren el resto del contenido de los programas mínimos de nuestras cátedras de Investigación Operacional, y del cual los alumnos sólo poseen notas de clase.

Pero esto no ha sido la única razón de su publicación. Además de corresponder a la primera parte de nuestros actuales programas, la metodología utilizada está a nuestro juicio más íntimamente ligada con nuestra posibilidad de conocer. Podrá llamar la atención que un primer volumen sobre temas de Investigación Operativa no se refiera a la Programación Lineal. No es casual que haya sido así. Entendemos que los métodos analíticos que en aquella se emplean, configuran toda una estructura extraordinariamente racional, de gran potencia, que permite hasta el análisis de sensibilidad de las soluciones, con elegancia, con precisión, con exactitud. Pero lamentablemente, no sólo compartimos el juicio de W. Baumol, quien en su libro *Teoría Económica y Análisis de Operaciones* expresa: "La programación tanto lineal como no lineal, es una técnica totalmente matemática, y por lo tanto, no tiene contenido económico alguno"... "la programación nunca nos dirá, de por sí, nada acerca del funcionamiento de parte alguna de la economía", sino que tenemos también muy en cuenta las hipótesis que debemos adoptar frente a una situación real, para poderla aplicar; hipótesis que como la de proporcionalidad, de aditividad, de divisibilidad y de constancia y exacto conocimiento de todos los coeficientes, deben adoptarse con sumo cuidado frente a cada situación en consideración. Es precisamente lo maravilloso de esa estructura que nos puede ocultar tales inconvenientes. Nuestro accionar en la labor docente y en la vida profesional nos ha hecho tomar con cautela todo aquello que aparezca como demasiado exacto. Hemos visto muchas veces buscar qué problemas se pueden resolver con tal herramienta, en lugar de tratar de comprender el problema y luego buscar o crear la herramienta necesaria para resolverlo.

Durante su redacción hemos tratado de ser claros, de explicar las cosas

todo lo simple que nos ha sido posible, la situación real que nos motiva, el modelo que lo representaría, las técnicas de resolución y los modos de proceder. Creyendo haber hecho suficiente énfasis en los aspectos prácticos. Esto, creemos, ha sido consecuencia de nuestra labor, no sólo en las aulas, sino en el quehacer profesional, donde la realidad presiona con mayor intensidad, y donde el "tiempo" alcanza su verdadero significado.

El tratamiento matemático se ha mantenido tan elemental como nos ha sido posible. Entendemos que para leerlo basta el conocimiento normal de elementos de cálculo diferencial, integral y de probabilidades.

Hemos partido generalmente de problemas concretos y tras analizarlos, recién fuimos hacia el modelo. No pensamos entonces en haber incurrido en un análisis de modelos; en todo caso, creemos haber establecido un estado intermedio entre aquello y el análisis del problema.

Inspirados por la realidad, hemos planteado problemas concretos. Su análisis nos ha llevado a la adopción del modelo. Pero es cierto que la selección de los problemas se ha preordenado con el fin de dar un cierto ordenamiento a los modelos resultantes.

Aunque la Investigación Operacional es una ciencia fuertemente cuantitativa, donde la matemática juega un rol muy importante, creemos que por tener como objetivo la acción, dándole al tomador de riesgos bases racionales para mejor decidir, necesita del concurso de otras disciplinas científicas. No creemos que la Investigación Operacional pueda reducirse a una serie de modelos de tipo matemático. Entendemos que quizá constituya una tentativa de interdisciplina. Pretender acercarse a la Realidad así lo requeriría, pues ésta aún no ha tomado conciencia (como ahora se dice) de que el conocimiento se ha departamentalizado en Facultades o Escuelas, y éstas, en departamentos cada vez más especializados.

El presente volumen se divide en dos partes. La primera constituye una introducción a la Investigación Operativa donde al mismo tiempo que hemos reseñado la evolución de esta ciencia, nacimiento, crecimiento, irradiación, haciendo especial referencia al desarrollo en nuestro país, hemos tratado de expresar qué es lo que entendemos por Investigación Operacional.

La segunda parte se refiere a los grafes y algunas de sus aplicaciones, donde se ha dedicado la mayor amplitud al tema de administración de proyectos por análisis de redes, cuyas técnicas son conocidas, vulgar y comercialmente, como C.P.M. y P.E.R.T.

La primera y segunda parte constituyen realmente, una reedición corregida y aumentada de nuestra publicación "Temas de Investigación Operativa", efectuada por el Departamento de Mecánica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata, en 1972, y que sirviera de texto para un curso de actualización profesional.

En general, además de un ejemplo que se resuelve, se incluye a continuación de cada tema un ejercicio para que el lector lo resuelva, o lo verifique. No hemos creído conveniente tomar como norma general el agruparlos todos al final de cada capítulo.

No pretendemos imponer nuestro criterio. Sólo lo exponemos ante los lectores, quienes, a través de un proceso de crítica, elaborarán su posición personal. Creemos así contribuir, aunque sea muy modestamente, al desarrollo del "espíritu de aventura" tan necesario para la investigación científica.

Emir IBARRA

# INTRODUCCION A LA INVESTIGACION OPERATIVA

## LA INVESTIGACION OPERACIONAL

Siempre nos ha preocupado poder contestar concretamente a la pregunta que a menudo nos han formulado:

¿Qué es la Investigación Operacional?

Como esa preocupación subsiste, esperamos que de las ideas y opiniones que expondremos, surja una forma de contestarla.

Se ha dicho que hasta hace unos años, era costumbre iniciar los artículos de carácter general sobre la Investigación Operacional con una definición, pero que ello ya no es así [1].

Esto nos reconforta porque hasta ahora no habíamos encontrado una definición que nos satisficiera ampliamente y que pudiera ser lo suficientemente simple y aclaratoria para los no iniciados.

Habíamos procedido, al inaugurar nuestros cursos, a dar una idea sobre el contenido del programa que entendemos debe desarrollarse en un curso de iniciación. Pero entendemos que si tratáramos de contestar a la pregunta inicial, solamente con la exposición de los puntos a tratar, podríamos crear la falsa idea de que la Investigación Operacional es el conjunto de técnicas que permiten resolver problemas de programación lineal, stocks, etc. En el mejor de los casos que se limita a aquello que ya se sabe [16].

Ante la imposibilidad de encontrar una definición esencial a partir del significado etimológico, y aún de la comparación de todas las definiciones que se han dado y que discrepan bastante unas de otras, hemos pensado, inspirándonos en Hessen [9], efectuar una mirada al desarrollo histórico de esta disciplina, mencionando especialmente ciertos hechos que favorecieron su desarrollo explosivo, con la esperanza de poner de relieve sus rasgos principales, extraer el concepto de su esencia, comprender incluso las definiciones contradictorias.

### Reseña histórica

El uso de técnicas científicas con fines operativos se remonta a la antigüedad. Así sería Arquímedes el primero en practicar la Investigación Operacional cuando concentrando la energía solar mediante espejos habría logrado incendiar los navíos romanos, durante el sitio de Siracusa.

Con el objeto de mejorar la operatividad del ejército de Baviera, Benjamín Thompson, conde de Runford, estudió y logró la elección de la tela óptima para la ropa de los soldados. También se ocupó del problema de su alimentación con vistas a reducir su costo [1].

Riquet, en 1662 presentó un plan, basado en pruebas efectuadas sobre modelos reducidos, que permitió construir en 15 años, a partir de 1666, el Gran

Canal del Languedoc, Francia, canal de 240 km de longitud y que vincula el Atlántico con el Mediterráneo [1].

A pesar de estos y otros ejemplos históricos, se reconoce como fecha de nacimiento de la Investigación Operacional, la víspera de la Segunda Guerra Mundial. Al decir de Churchman [5], ninguna ciencia ha nacido en un día determinado; emerge por la convergencia de un creciente interés en determinados problemas y por el desarrollo de métodos científicos, técnicas y herramientas que resultan adecuadas para resolverlos.

En 1938, en Bawdsey, Gran Bretaña, un grupo de científicos, bajo la dirección de Blackett (premio Nobel de Física), es encargado de estudiar los problemas que permitan elegir una estrategia radar óptima, es decir, que aconsejen la mejor manera de distribuir los radares existentes sobre el archipiélago británico con el objeto de optimizar la detección de las posibles incursiones de la aviación enemiga.

Nos parece conveniente reproducir aquí la cita de Birrien [4] sobre la decisión de Blackett: "agrupar un cierto número de hombres que posean una buena experiencia científica pero ningún conocimiento especial de radio, a fin de estudiar los nuevos problemas desde un punto de vista general". La actividad por ellos desplegada fue conocida como Investigación Operacional (Operational Research) porque sus primeros estudios fueron consagrados al uso operativo del radar. Expresa Birrien [4] que este término fue adoptado porque los trabajos se distinguieron de los estudios clásicos de investigación y desarrollo del radar efectuados en gabinetes de estudio, o laboratorios; este nuevo enfoque significaba ir sobre el terreno, ver cómo funcionaban las operaciones, aconsejar sobre su aplicación en el teatro de operaciones, o sea, durante su uso real por las tropas contra el enemigo.

Queremos enfatizar la misión asignada a este grupo científico: *analizar el mejor uso de los radares existentes* con el objeto de obtener la detección más eficaz de las incursiones de la aviación enemiga.

Al finalizar la Segunda Guerra, existían en Inglaterra, unos 350 científicos (asistiendo a las tres armas) encargados de estudiar problemas bélicos.

Entre sus trabajos más conocidos se citan: [19] el ataque antisubmarino, la determinación del tamaño de los convoyes que abastecieron desde los EE.UU. a los ejércitos aliados; el plan de bombardeo sistemático de Alemania.

Se había comprobado que la acción del bombardeo directo a los submarinos no acusaban rendimientos satisfactorios. El cambio del tipo de explosivo no había producido mejoras sensibles. Luego de estudiar el modo operativo de ataque, se sugirió modificar la profundidad de explosión de las bombas. Puesto en operaciones, se obtuvo una eficiencia 5 veces mayor. No fue buscar nuevos explosivos ni armas secretas, sino...

... utilizar de la mejor manera lo ya existente.

Al comprobar que la cantidad de naves hundidas por cada ataque submarino era prácticamente la misma, independientemente del tamaño del convoy, se sugirió aumentarlo. De ese modo se logró disminuir el porcentaje de bajas. Simultáneamente se obtenían mejores condiciones de apoyo y de defensa mutuos. De allí el enorme tamaño de los convoyes que atravesaron el Atlántico Norte, abasteciendo a las fuerzas rusas.

La experiencia recogida de los ataques aéreos permitió establecer el tipo de explosivos a utilizar, el tonelaje de bombas a descargar, el modo de bombardear, la formación de las escuadrillas aéreas necesarias, en calidad y cantidad, para destruir los objetivos situados en Alemania y que fueron seleccionados de acuerdo con su importancia y con la urgencia en destruirlos.

Poco después de Pearl Harbor, los EE.UU. comienzan a incorporar grupos de científicos a sus estados mayores, inspirándose probablemente en su aliada Gran Bretaña. Al terminar las hostilidades, la Fuerza Aérea tenía alrededor de 400 investigadores operacionales, calculándose que cantidades similares existían en la Marina y en el ejército de los EE.UU.

Como aplicación más importante se menciona el operativo "Hambreadamiento" del archipiélago japonés. Del análisis de los informes sobre el sembrado de minas por los bombarderos B. 29, se determinó el mejor modo de operar: cada aparato debía actuar aisladamente, en horas de la noche y a una altura de unos 300 metros. Aplicando este sistema desde los primeros meses de 1945, se rodeó el archipiélago con un cinturón de 12.000 minas. Terminada la guerra, se observó que había producido bajas de navíos mercantes japoneses, en cantidad tan importante como la conseguida con el bombardeo directo. La diferencia radicaba en que la actividad de los bombarderos había sido sólo una vigésima parte de la desplegada para el bombardeo directo.

Los equipos de científicos fueron asignados, como asesores, a quienes tenían la responsabilidad de conducir las operaciones. De allí —dice Ackoff [2]— que sus trabajos fueron luego conocidos como INVESTIGACION OPERACIONAL en el Reino Unido y con una variedad de nombres en los EE.UU.: análisis, evaluación, investigación de operaciones; análisis, evaluación, investigación de sistemas; ciencias de administración (Management Science). El nombre de INVESTIGACION DE OPERACIONES fue, y es, el usado con mayor amplitud en los EE.UU.

## Postguerra

Resulta claro que la Segunda Guerra fue un hecho que "presionó" favorablemente el desarrollo de estas disciplinas, dado que en tales períodos las urgencias económicas quedan subordinadas a las necesidades de la Defensa.

Se ha dicho [19] que los científicos de mayor jerarquía contribuyeron a la creación de esta nueva ciencia precisamente porque se trataba de un período de guerra, pues, en tiempos de paz, sus ocupaciones habituales no les hubieran permitido dedicarse a aquella actividad.

Terminada la guerra en 1945, las investigaciones continúan tanto en el terreno militar como en el civil. Después de 1945, Gran Bretaña, se encuentra con una economía debilitada. Ha sufrido incluso en su propio territorio, las consecuencias de las acciones bélicas. Debe reconstruir. En cambio, EE.UU. puede dedicarse a tareas de expansión. Esta situación explicaría dos mentalidades diferentes que ya se habían insinuado durante el período bélico.

Gran Bretaña, y Europa en general, tenderán a usar de la mejor manera posible lo ya existente. EE.UU., si bien se inspiró inicialmente en Gran Bretaña, lugar de nacimiento de la Investigación Operacional, se dedicará más hacia la

creación de nuevos elementos. Quizá en esto radique la causa de que las disciplinas reciban nombres diferentes a uno y otro lado del Atlántico.

Los americanos hablan de la *Operations Researchs* (Investigación de Operaciones), en cambio los ingleses hablan de la *Operational Research* (Investigación Operativa u Operacional).

Francia utiliza la denominación de "Recherche Opérationnelle". Italia, usa "Ricerca Operativa". España, Investigación Operativa. Desde que se iniciara en nuestro país, hacia mediados de la década del 50 según nuestro conocimiento, se utilizó el nombre de Investigación Operativa —y a veces, Operacional—. Dejamos constancia que lamentamos que traducciones de textos europeos que circulan en nuestra patria, hagan uso del título... Investigación de Operaciones.

Como se puede observar estos nombres evidencian dos mentalidades diferentes: la europea tiende a cómo debemos hacerlo; en cambio la americana hacia qué debemos hacer.

Más hacia las técnicas de creación los americanos; más hacia las técnicas de mejor uso de lo ya existente es la mentalidad europea.

La reducción de sus gastos de defensa, la serie de nacionalizaciones de sus industrias básicas, la necesidad de reconstruir sus plantas industriales, habrían sido las razones principales que favorecieron, en Gran Bretaña, el comienzo de la aplicación de la Investigación Operacional en el sector civil.

El incremento de la investigación de sistemas de defensa por parte de EE.UU. sería la causa de que la mayoría de los investigadores operativos permanecieran al servicio de las Fuerzas Armadas. Según Ackoff [2] el pasaje de los científicos hacia el sector civil se produciría en los primeros años de la década iniciada en 1950, cuando el conflicto de Corea demandó mayor productividad de gran parte de la industria americana. A partir de entonces, la Investigación Operacional comienza a expandirse en los EE.UU.: industrias, firmas consultoras, universidades, institutos de investigación y reparticiones gubernamentales, absorben muchos de aquellos científicos.

#### Síntesis cronológica

Hemos querido indicar cronológicamente algunos acontecimientos que, entendemos, han permitido cumplir con la trayectoria de toda ciencia: nacer, crecer e irradiar.

1938: -Gran Bretaña. Blackett forma al primer grupo de Investigación Operativa.

1940: -Gran Bretaña. Puesta en operación de los primeros equipos de Investigación Operativa en el terreno militar.

1942: -EE.UU. Igual acción que Gran Bretaña en 1940.

1946: -Gran Bretaña. Creación de un grupo operacional en el Ministerio de Comercio.

-EE.UU. Descubrimiento de la E.N.I.A.C. por Eckert-Mauchly. Se crea la Rand Corporation.

1947: -EE.UU. Dantzig pone a punto el método del Simplex para resolver problemas de P.L.

1948: -Gran Bretaña. Se crea la Operational Research Society.

1950: -Gran Bretaña. Comienza a publicarse el *Operational Research Quarterly*.

1951: -EE.UU. Construcción del primer ordenador comercial UNIVAC I por Ecker-Mauchly.

1952: -EE.UU. Se crea la Operations Research Society of America (ORSA) que publicará el Journal of the O.R.S.A.

1956: -Francia. Se crea la Société Française de Recherche Operationelle que editará *Revue de Recherche Operationelle* (Dunod).

-EE.UU. Aparecen las computadoras de segunda generación (a transistores).

1957: -Se establece la International Federation of Operational Research Societies (I.F.O.R.S.).

-EE.UU. Churchman-Ackoff-Arnoff publican el primer libro básico sobre Investigación Operativa *Introduction to Operations Research*. Wiley & Sons, 1957.

1960: -Argentina. Se formaliza la constitución de la Sociedad Argentina de Investigación Operativa.

#### LA INVESTIGACION OPERACIONAL EN NUESTRO PAIS

Es difícil para quienes fuimos actores del proceso mantenernos totalmente objetivos. Sirvan estas palabras, de anticipada disculpa.

Hacia 1958, se realizan en la Junta de Investigaciones y Experimentaciones de las Fuerzas Armadas (Avda. del Libertador casi Coronel Díaz), un ciclo de conferencias sobre Investigación Operativa, organizado y conducido por el Dr. Agustín Durañona y Vedia. En 1959, en ese mismo lugar y dirigido por el mismo distinguido científico argentino, se dicta un curso anual sobre el tema, al que concurren profesionales y funcionarios de diferentes reparticiones nacionales.

Desde unos años antes, en Transportes de Buenos Aires (T.B.A.) un grupo de profesionales (muchos de ellos egresados de la Universidad Nacional de La Plata) habían comenzado a tratar de aplicar métodos científicos (hoy diríamos de programación matemática) a los problemas de mantenimiento de las unidades de transporte. Factor fundamental de estas actividades fueron la presencia del Ing. Pedro G. Fleitas como Administrador de T.B.A., de su asesor técnico, el Sr. Ramón Bacardit Cardó y del profesor Dr. Faustos Toranzos.

Nada mejor que parte de ese grupo tuviera la oportunidad de un conocimiento sistemático de la disciplina que ya venía aplicando. Y esa fue la oportunidad que tuvimos de reencontrarnos con el gran maestro Dr. Durañona y Vedia.

Sobre la finalización de 1959, quienes veían la gran aplicabilidad de esta disciplina, comenzaron a reunirse, en CITEFA primero, en los salones del I.N.T.I. después, tratando de organizar la Sociedad Argentina de Investigación Operacional. Recuerdo a los doctores A. Durañona y Vedia; Toranzos, F.; Magdalena Mouján Otaño; E. Machado; a los ingenieros H. Reggini, C. Muller y H. Bravo como asiduos concurrentes. Esas acciones iniciales dieron pronto fruto: en mar-

zo de 1960 se formaliza la creación de la Sociedad Argentina de Investigación Operativa (S.A.D.I.O.).

La realización de Jornadas, cursos y conferencias, la intervención en congresos internacionales; la publicación de los Anales de las jornadas respectivas, de su boletín periódico, son algunas muestras de su importante acción.

Una muy importante labor realiza la Escuela de Investigación Operativa (Dirección General de Investigación y Desarrollo - Ministerio de Defensa). En ella pueden cursarse estudios de distinta duración y para diferentes niveles. Organiza anualmente, varios Seminarios sobre diversas disciplinas que además de darle al asistente una amplia información, les permite forjar razonables expectativas sobre el uso de esta interdisciplina, en la conducción de organizaciones y, en general, en la adopción de decisiones. Publica regularmente un Anuario.

Con respecto a su utilización en la actividad económica nos parece suficiente remitir al lector a la consulta de las publicaciones mencionadas (por ejemplo: los Anales y Boletines de S.A.D.I.O.). Basta una rápida recorrida de sus páginas para constatar la cantidad de investigadores que se dedican a su aplicación en diferentes sectores del quehacer nacional.

#### La Investigación Operacional en nuestras universidades

Entendiendo necesario promover a la educación y entrenamiento en Investigación Operacional, en el ámbito universitario, un grupo de discípulos del Dr. Durañona, comienza a difundirla a través de conferencias, cursos y seminarios.

Tenemos presente aquí al Ing. Isidoro Marín que dirige su atención a la Universidad de Buenos Aires. Por nuestra parte concentramos nuestros esfuerzos en La Plata. Estimamos que muy pocos años después similares esfuerzos se desarrollaron en Bahía Blanca, Córdoba, Mar del Plata, etc.

Actualmente existen cursos regulares en la mayoría de las carreras de Ingeniería, Ciencias Económicas, Estadística, Matemática, especialmente, de casi todas las universidades argentinas, tanto nacionales como privadas.

#### La Investigación Operacional en la Universidad Nacional de La Plata

El apoyo especialmente de dos grandes maestros, el Dr. Clodoveo Pasqualini y el Dr. George M. J. Dedeñant, hacen posible que en 1960, en el Departamento de Aeronáutica, de la entonces Facultad de Ciencias Fisicomatemáticas, pudiésemos dictar, junto con el Ing. Helio N. Bravo, un curso sobre algunos temas de Investigación Operacional, para graduados y alumnos de la Universidad, cursos que se reiterarán en años siguientes.

Corresponde también al Dr. Clodoveo Pasqualini, el mérito de haber logrado la incorporación de la Investigación Operacional al plan de estudios de una ingeniería. Desde 1969, se dicta regularmente en el Departamento de Aeronáutica, la asignatura Investigación Operativa.

Casi inmediatamente después, el Departamento de Ingeniería de la Producción y el Departamento de Mecánica inician actividades similares.

Sabemos que desde hace unos años el Dr. Emilio Machado dicta tal asignatura en la Facultad de Ciencias Económicas.

Es probable que hayamos omitido algún accionar similar en alguno de los sectores de nuestra Universidad Nacional de La Plata. Esperamos que con el tiempo podamos salvarlo. Por ahora, reiteramos nuestras excusas.

#### ALGUNAS DEFINICIONES DE INVESTIGACION OPERACIONAL

Las definiciones primitivas no son suficientes. No podemos quedarnos con que es un conjunto de técnicas que sirven para mejorar la eficiencia de la gestión. Tampoco con que es: la ciencia de la decisión; o con: aquello que los investigadores operacionales hacen.

Para Johnson [4], la Investigación Operacional estaría definida como la predicción y comparación de valores, de eficiencias y de costos, de un conjunto de elecciones específicas sobre una acción que ponga en juego sistemas hombres-máquinas. Se basa sobre un modelo de la acción, descrito analíticamente por una metodología lógica, y si es posible, por una metodología matemática en la cual el valor de los parámetros de base de la acción se determina ya sea por un análisis histórico, ya por la concepción de las operaciones, ya por experiencias, ya por cálculos. Dado que deberán incluirse todos los factores humanos y materiales, se obtendrá para la acción propuesta, una estimación de la incertidumbre en la previsión del resultado, sus valores, su eficiencia y su costo.

Koontz y Daniel, estiman que la definición más aceptable consistiría en decir:

... es la aplicación de métodos científicos para estudiar las alternativas frente a una situación que presente problemas, con el objeto de administrar una base cuantitativa que nos permita llegar a una solución óptima, en función de los objetivos perseguidos.

Es evidente que la Investigación Operacional se refiere a *problemas reales*. Es por lo tanto la realidad quien motiva el análisis, el ataque, del investigador operacional. Frente a los problemas generados por la situación detectada, debe hacer uso de métodos para resolverlos. La resolución debe hacerse en forma integral, no olvidando las interacciones entre el medio y el sistema que estamos examinando, ni un aspecto frecuentemente olvidado: el aspecto humano del problema.

#### DECISION E INVESTIGACION OPERACIONAL

El motivo del éxito o del fracaso de cualquier operativo, ya sea militar, comercial, industrial, político, social, etc., depende de la adecuada o errónea utilización de los medios que se disponen para ese fin. Para ello, frente a distintas alternativas se debe "*decidir*".

Entendemos que decidir es: elegir entre diferentes alternativas. Cuando ese proceso de selección lo efectuamos considerando diferentes criterios que, como "filtro de opciones", nos permiten establecer un orden de preferencia, estaríamos buscando la decisión óptima.

Esos criterios podrían ser, por ejemplo, [17]: la mayor o menor contri-

bución al logro del objetivo, costos a incurrir, tiempos de realización, factibilidad, posibles efectos secundarios.

Es evidente reconocer que prácticamente ninguna de las alternativas presentadas, satisfará plenamente la totalidad de los criterios. Ante esta realidad, no será pretensioso hablar de "decisión óptima". No sería mejor decir suboptimizar, en lugar de optimizar.

Con respecto a la factibilidad conviene aclarar lo siguiente. No basta con que la alternativa seleccionada sea técnicamente correcta y económicamente sana. Posteriormente, deberá ponérsela en operaciones. Y aquí es necesario contar con la aceptación de quienes deben ejecutarla. Siempre hemos sostenido [11 y 12] que las restricciones no son únicamente de carácter material, que las más importantes son las restricciones humanas. Acaso no hemos comprobado a menudo que un método, por excelente que fuese, si no es entendido por quienes deben aplicarlo, se traduce casi con seguridad, en un fracaso.

George S. Odiorne [17, pág. 75], contempla estos mismos factores. Con respecto al tercero, expresa textualmente: "... ¿Es culturalmente posible? Muchas ideas, técnica y racionalmente brillantes, son del todo inútiles porque no pueden salvar barreras culturales. Estas pueden mostrarse en forma de resistencias que usted puede esperar de parte del jefe, su propia esposa, el sindicato, sus compañeros o los clientes. Si ellos no *aceptan* la opción, ésta debe considerarse como impracticable a menos que se pueda obtener la aceptación".

Pero luego de la decisión viene la acción. La decisión se traduce en: *coordinar un conjunto de actividades cuyas consecuencias se sentirán en el futuro*. Y, además, esas consecuencias son generalmente importantes.

El Prof. Rodríguez Sahagún expresa [18] que en otras épocas la decisión del empresario, entre las distintas alternativas que se le presentaban, era relativamente sencilla, pues el número de factores que debía tener en cuenta era pequeño y podía abarcar en su examen —muchas veces casi intuitivo— el conjunto de ellos. Que la complejidad del mundo económico actual, e incluso de la estructura interna de las empresas —con un grado elevado de concentración de medios— hace cada vez más difíciles las decisiones. Que ya no cabe la decisión intuitiva; que la decisión actual ha de ser el fruto de una reflexión y de una preparación racional. Es en este campo de la decisión científica —continúa diciendo—, donde la Investigación Operativa u Operacional, que sería gramaticalmente más correcto— constituye un instrumento de valor incalculable.

Nosotros no somos tan terminantes, aunque coincidimos en su espíritu.

El *decididor* decide en base a *intuición* y en base a *razonamiento*. Podríamos intentar simbolizarla así:

$$I + R \rightarrow D \quad \text{ó} \quad D = (R, I) \quad \begin{array}{l} D = \text{Decisión} \\ I = \text{Intuición} \\ R = \text{Razón} \end{array}$$

La componente intuitiva más la componente racional implican el acto de decisión; o también la decisión es el conjunto formado por las componentes racionales y las intuitivas.

Entonces la Investigación Operativa, tendría como misión (según nuestro entender) *tratar de ir dando mayor peso a la componente racional de todo*

*acto de decisión*, es decir, que las decisiones sean cada vez menos intuitivas y descansen cada vez más en bases racionales.

Hay que aclarar que no puede haber nunca una decisión totalmente racional, porque quien decide muchas veces tiene en cuenta, en el acto de la decisión, otros factores, que pueden ser de prestigio, políticos, circunstanciales, que no siempre son contemplados por el analista.

Quien decide es un ser humano. Este no es *exclusivamente* racional; admitirlo sería olvidar que, como mínimo, posee una componente emocional.

El analista va a suministrar al decididor, bases racionales. Le va a sugerir alternativas, pero es el decididor (empresario, tomador de riesgos) quien decidirá el método a aplicar.

Para poder aumentar el peso de la componente racional, la Investigación Operacional pretende cuantificar al máximo todos los parámetros que determinan el estado del Sistema. Así, podrá *sugerir* la mejor decisión a tomar.

Se ha dicho muchas veces *determinar*, en lugar de *sugerir*. Es cierto que de alguna manera indirecta se determina, pero hay que aclarar que el *analista sugiere y no decide*. Cuando desgraciadamente nos encontramos en casos donde hay que analizar y decidir, sentimos que nuestro análisis no es totalmente imparcial, sino que está influido por el acto posterior que debemos realizar, o sea el decidir. Si hemos analizado mucho el problema, tendremos también las secuelas que el análisis nos deja y por lo tanto la decisión no será lo suficientemente enérgica en el momento de la aplicación.

Por eso se sugiere siempre que los grupos de análisis sean elementos "staff" y no elementos de línea en la organización.

## SITUACION, PROBLEMAS

Entendemos por problema a la diferencia que podemos establecer entre lo que sucede y lo que deseáramos que sucediera. Por ello, cuando nos enfrentamos con una situación del mundo real, establecer el verdadero problema, es muchas veces la parte más importante de todo el análisis.

A menudo se puede comprobar que cuando el analista es llamado por una empresa se encuentra con que aquélla realmente no sabe cuál es el problema que quiere que el analista le solucione.

A nosotros no nos extraña que "todavía" se llame a un analista a los efectos de que determine el mejor programa de producción con el objeto de maximizar beneficios, minimizando costos, reduciendo consumo de materia prima y de mano de obra, todo al mismo tiempo.

Es que muchas veces los fines que persigue son incompatibles. Por ello decimos que no tienen definido exactamente el problema que los preocupa.

El analista debe detectar el verdadero problema. Para ello no sólo debe establecer contacto con el alto nivel, sino que debe relacionarse con todos los niveles que, a su juicio, puedan suministrar información.

En la detección del verdadero problema, el analista insume, muchas veces, la mayor parte del tiempo que dedicará a todo su trabajo de investigador.

## Modelos y realidad

Aceptamos que la Investigación Operacional es una nueva aptitud mental para enfocar problemas reales; basándose fundamentalmente en la apreciación de la situación real, no olvidando en ningún momento que se está trabajando con modelos, que esos modelos son abstracciones que necesitamos para poder referirnos al problema real, que es el que inicialmente nos preocupa y al que finalmente queremos resolver.

Por ello tampoco resulta conveniente insistir en algunas definiciones que han tratado de llamarla la ciencia de los modelos; porque si bien es cierto que el modelo es una necesidad para todo el proceso, es... sólo una parte de él.

Análoga conclusión podríamos establecer con respecto a la Matemática. Existe una tendencia a considerar a la I.O. como una rama de esa ciencia. Nosotros creemos que el uso del instrumental matemático le ha aumentado su potencia de resolución, que la Matemática es una, entre otras, de las disciplinas científicas que contribuyen al crecimiento y posterior irradiación de la Investigación Operacional.

El mundo real no nos suministra problemas exclusivamente ingenieriles, o físicos, o químicos, etc. El mundo real nos suministra problemas. La necesaria presencia de equipos interdisciplinarios para resolverlos, es una prueba de ello. Las diferentes disciplinas científicas significan, diferentes modos de observar la realidad.

Hemos dicho que existe una tendencia a considerar a la I.O. como un capítulo más de la Matemática. Sin ánimo de polémica entendemos, inspirándonos en Birrien [4] que esta desviación se debería a aquellos matemáticos que creyendo encontrar en la I.O. una rama más de la Matemática, se han despreocupado del aspecto práctico de la solución, limitándose a descubrir algoritmos y teoremas.

No podemos dejar de mencionar el aporte de otras disciplinas. Así por ejemplo, la Cibernética [8, cap. 13], la Electrónica, las Ciencias Económicas y Sociales. Con respecto a esta última es interesante mencionar que el Congreso Internacional realizado en Cambridge, del 14 al 18 de setiembre de 1964, organizado por la Operational Research Society, se denominó: "Operational Research and the Social Sciences" (La Investigación Operacional y las Ciencias Sociales). Existe un interesante libro al respecto [14].

Luego de analizar un problema, viene la formulación del modelo, generalmente, matemático. Recordemos que antiguamente se decía que en los gases prácticamente se cumplía que  $p \cdot v = \text{cte}$ . Este primer modelo se mejoró cuando se estableció la condición de gases ideales y se vio que para estos gases ideales, que cumplían las leyes de Boyle-Mariotte y Gay Lussac:  $p \cdot v = R \cdot T$ .

Luego, a fines del siglo pasado, las experiencias de Andrews encontraron zonas en que esta hipótesis no era cierta y así se corrigió la anterior hasta llegar, por ejemplo a:

$$(p + a/v^2)(v - b) = \text{cte.} \quad \text{Van der Waals}$$

es decir cada vez que se quiere acercar más a la realidad, el modelo comienza a complicarse.

De manera análoga nos encontramos cuando frente a una situación, pretendemos construir el modelo.

Frente a una situación concreta, comenzaremos por tratar de identificar los parámetros fundamentales que condicionan el proceso. Evidentemente, hay algunos que se pueden dejar de lado en primer análisis (o por lo menos suponemos que son factibles de dejar de lado). Así empezamos a construir nuestro modelo del cual esperamos derivar soluciones que nos justifiquen las pasadas experiencias y nos permitan prever en cierto modo el futuro.

Es posible que debamos mejorarlo, que debamos incluir algún parámetro que hemos omitido en nuestra primera aproximación. Esta incorporación la debemos hacer gradualmente hasta que obtengamos una respuesta adecuada.

Si quisiéramos contemplarlos a todos desde un principio, y lográsemos construirlo, nos encontraríamos con que el modelo es tan "perfecto" que casi es la realidad misma, pero inservible por su complejidad. Así, con un modelo que contemple todos los parámetros, se tendrá la imagen quizás mejor que se puede concebir de la realidad, pero desde el punto de vista operativo: para trabajar, para encontrar soluciones, para encontrar bases razonables de decisión, resultará tan inservible como querer trabajar con la realidad misma.

## METODOLOGIA DE LA INVESTIGACION OPERACIONAL

La metodología debe permitir que el decididor, aquél que tomará el riesgo de la decisión (riesgo porque es de su responsabilidad el éxito o fracaso de la operación), pueda efectuar la decisión más racional posible, o sea, que se minimice el riesgo de ser equivocada. La metodología a utilizar debe adoptarse "a fin de facilitar la decisión".

Para ello contará con modelos, fundamentalmente matemáticos, con la cuantificación de los factores que intervienen en el proceso.

Se ha dicho [15] que el núcleo de la acción del investigador operacional es el entrar en contacto con la realidad, luchar con ella y extraerle un modelo.

El modelo así extraído debe servir para poder contestar a las preguntas que se le hagan. Entonces es una investigación activa; es decir, es un camino que no se debe confundir con la simple prescripción de remedios sino que es más que nada una disposición para entrar en contacto con el problema real y lograr extraer el modelo sobre el cual trataremos de obtener una solución para implementar después, volviendo nuevamente al problema real, dicha solución.

Conocido el modelo matemático, cuantificados los parámetros que en él intervienen, habrá que hacer uso del juego lógico matemático para obtener soluciones.

Las soluciones matemáticas son correctas, desde el punto de vista matemático, mientras se haya aplicado el método racionalmente.

El hecho de que determinadas soluciones puedan no concordar perfectamente con la realidad no se deberá a la matemática, sino a la deficiencia del modelo; es decir, no hay que atribuir al fracaso de la matemática la no adecuación de la solución al problema real, sino, a que el modelo ha sido muy imperfecto.

En tal caso será necesario detectar las causas de esos desvíos e incorporar los factores, que en su primer análisis, se haya despreciado.

Supongamos que tenemos ya la solución (obtenida de ese modelo), que la confrontamos con la realidad y que responde a nuestros objetivos dentro de las limitaciones que aceptamos: entonces corresponderá lograr la implementación.

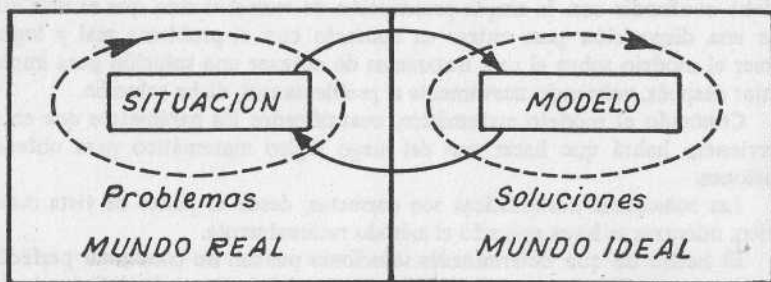
Si bien es cierto que algunos analistas operativos dicen que su misión termina en el momento que suministran las soluciones y han comprobado que responden a la situación real, entendemos que deben ayudar a implementar esa solución.

Una cosa es el planeamiento y la programación y otra la ejecución. El personal estable tiene que poner en operaciones el plan establecido, que es una solución que se encontró y que se debe verificar en operación; pero los que han establecido los planes, aunque no decidan, deben observar y controlar el proceso. No nos olvidemos que cuando creamos el modelo estábamos aceptando la presencia de ciertos factores en el medio que presionan sobre nuestro sistema y que pueden cambiar con el tiempo. No nos olvidemos que hoy estamos analizando un problema en función de los parámetros que, "en este momento", representan las acciones que el medio puede estar ejerciendo sobre el sistema, y cuando implementemos nuestra solución, estaremos en el mañana y en ese momento los valores de esos parámetros pueden haber cambiado. Por eso es que hay que estar atento por si la variación de esos parámetros significa alguna variación en las conclusiones.

Por otra parte, la puesta en ejecución del plan estructurado nos va a realimentar nuestro sistema de investigación, de modo tal que podamos comprobar si efectivamente nuestras hipótesis, que significaron aceptar ciertos factores y despreciar otros, realmente se van justificando por el proceso que se desarrolla.

Concluyendo: aplicamos un modelo a una situación a los efectos de describirlos en términos de sus características esenciales, de forma tal que esa representación simbólica nos permita el uso del lenguaje matemático utilizando, en lo posible, números. En cuanto a las soluciones, las obtendremos aplicando las reglas del juego lógico matemático.

Con el diagrama siguiente pretendemos dar una "imagen" de lo antes expresado:



Observando el Mundo Real, el analista aprecia una situación; examinándola detecta el problema, lo verbaliza. Luego lo simboliza pasando al Mundo Ideal. Allí trata de generar un modelo (la mayoría de las veces, matemático);

jugando con ese modelo generará soluciones. Obtenidas las soluciones deberá comprobar su significado en el Mundo Real.

Compatibilizado todo el proceso de resolución, deberá encarar la implementación.

## LA INVESTIGACION OPERACIONAL Y LAS ACTIVIDADES HUMANAS

Aceptando que todo ser tiende a su conservación, que esta tendencia es dinámica pues presenta potencias que debe desarrollar, y que tanto la conservación como el desarrollo cuestan muchos esfuerzos, podemos también aceptar que estos esfuerzos configuran el conjunto de actividades humanas.

Entendemos que las más importantes son las llamadas actividades culturales (cuidado de su espíritu y de su cuerpo) y que las actividades económicas, como las políticas, son bases de apoyo de ese desarrollo cultural.

El conjunto de actividades que suministra los bienes necesarios para el desarrollo de la actividad cultural, constituye el subconjunto de actividades económicas.

Dentro de éstas pueden detectarse dos aspectos fundamentales: el económicamente estricto y el técnico. El primero nos dirá cuales son los bienes que prioritariamente debemos conseguir, la técnica establecerá los diferentes modos como esos bienes pueden conseguirse. Y nuevamente, el económico estricto, decidirá cual de los modos deberá usarse teniendo en cuenta el valor de los esfuerzos que implica cada uno de ellos [3].

Entendemos que el ingeniero es fundamentalmente un hacedor. Debe proyectar cosas factibles, que respondan a una necesidad real, que se realice con recursos disponibles no sólo materiales sino financieros y fundamentalmente en un tiempo finito.

Sin embargo, a menudo podemos comprobar que se proyectan cosas con materiales que no tenemos, contando contingentes de mano de obra, capacidades manuales y directivas que no disponemos y con capitales que tampoco se dispone; para realizar esa obra que tampoco sabemos cuánto tiempo nos va a insumir, olvidándonos que en el momento en que proyectamos estamos en el "hoy" y que se realizará "mañana".

Cuando esté realizado tendrá que satisfacer una necesidad del "mañana" y no la del "ayer". Es decir que no debemos caer en proyectar hoy para realizar mañana lo que ya necesitamos ayer; ésto es el juego de un parámetro cuya influencia poderosísima no siempre se recalca: "tiempo".

No debe creerse en los recursos infinitos y el tiempo infinito, (ésto último es, lamentablemente, el más finito de todos los recursos): los recursos son limitados, en cambio, las necesidades van en aumento a medida que crece el nivel y género de vida de la población, y es nuestro deber favorecer dicho crecimiento así como que se satisfagan las necesidades.

Nosotros pensamos que la investigación operativa es una actitud mental para encontrar los mejores modos de hacer. Para esto necesitamos algún criterio que se tome como índice de eficiencia. Esos criterios son económicos y se refieren a la adecuación de los recursos existentes de la mejor manera posible.

La investigación operacional, al examinar los procesos, y al tratar de encontrar el modo de acción óptimo, está rigiéndose por algún criterio de eficiencia y éste es un criterio económico.

*Por eso la Investigación Operacional trata problemas reales técnicos, pero haciendo uso de conceptos económicos; por ello creemos que como mínimo es una disciplina eminentemente técnico-económica.*

De acuerdo con Dehem [6], junto con las ciencias de la naturaleza están las ciencias del hombre: aquellas que tienen por objeto el comportamiento individual o colectivo del hombre. Las principales ciencias humanas son la Psicología, la Antropología, la Sociología y la Economía. El universo económico se distingue esencialmente del mundo físico porque en aquél, el hombre es un agente activo. La ciencia económica es una ciencia del hombre.

Ya en 1929, Gaëtan Pirou —según [20]— al referirse a los problemas de las doctrinas sociales y las ciencias económicas, definía a la ciencia económica como aquella que se proponía conocer la realidad económica. La ciencia se propone conocer la realidad, en cambio, la doctrina pretende muchas veces reformarla, encaminarla, accionar sobre la realidad; la ciencia se preocupa de revelar, de conocer la verdad, la doctrina en cambio le da un ideal, una meta, un objetivo. La ciencia observa lo que es, en cambio la doctrina proclama muchas veces lo que debería hacerse. La ciencia constata lo que se ha hecho, la doctrina dicta lo que hay que hacer.

Así por ejemplo, un hombre de ciencia estudia la vida económica del mismo modo que el fisiólogo estudia sobre el cuerpo humano las funciones fisiológicas: para conocer estas funciones, los mecanismos y las leyes; es decir, observa hechos, establece leyes, elabora teorías. El doctrinario, en cambio (el caso concreto del médico), estudia sí los problemas de la fisiología, pero con otro objetivo: para actuar, para curar, para salvar. Es decir no sólo observa y establece leyes, no sólo elabora teorías (en cierto modo una actividad pasiva con respecto a la realidad) sino que tiende a accionar. Podemos decir, la ciencia es especulativa, en cambio la doctrina es normativa (normas de acción).

Si recordamos que para Johnson la I.O. estaría definida como la predicción y comparación de valores, de eficiencias y de costos, de un conjunto de elecciones específicas sobre una acción que ponga en juego sistemas hombres-máquinas;

que la Investigación Operacional parte del mundo real y que no actúa simplemente a los efectos de establecer un modelo matemático con el cual solazarse encontrando solamente sus soluciones;

que las soluciones extraídas del modelo deben ser evaluadas y confrontadas con la realidad;

y que si tales soluciones son factibles, debe implementarse todo el operativo para ponerlas en acción.

No será mejor considerar a la Investigación Operacional como una ciencia humana y que el aspecto matemático es sólo una parte de ella; que la Investigación Operacional necesita de casi todas las disciplinas científicas conocidas para utilizarlas como útiles de investigación y resolución de los problemas propuestos.

O quizá, brevemente, adoptando una cita de Kaufmann [13]: "es la ciencia de la acción".

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1] Abrams, J. W.: *Antecedentes históricos de la Investigación Operativa*, Proceeding of the fifth International Conference on Operational Research. 1969, Selección 1972, tomo I. Escuela de Investigación Operativa. Ministerio de Defensa, Bs. As.
- [2] Ackoff-Sasiemi: *Fundamental of Operations Research*, Wiley Sons, 1968.
- [3] Belaunde, C.: *Economía Política*, Troquel Bs. As. 1964.
- [4] Birrien, J. Y.: *Information et Management*, Dunod, 1970.
- [5] Churchman - Ackoff y Arnoff: *Introduction to operations research*, Wiley Sons, 1957.
- [6] Dehem, Roger: *Initiation à l'économie*, Dunod, 1967.
- [7] Faure, Boss y Le Garff: *La recherche opérationnelle*, P.U.F., 1961.
- [8] Figuerola Esquiús, José: *Contribución de la Cibernética a la Investigación Operativa*. Cap. XIII, de "La Investigación Operativa en la Industria", Deusto. Bilbao. 1964.
- [9] Hessen, J.: *Teoría del Conocimiento*, ed. Losada S.A., Bs. As., 1938.
- [10] Ibarra-Valiente y colaboradores: *Investigación Operativa*. Cuaderno I, (apuntes). Centro de Estudiantes de la Facultad de Ingeniería, Universidad Provincial de Mar del Plata, 1971.
- [11] Ibarra, Emir: *Programación de una línea de reparación de carrocerías (modelo estadístico)*. Anales de Sadio: Primeras Jornadas Argentinas sobre Técnicas Matemáticas en la Industria, el Comercio y la Administración Pública, pp. 373-7. Impreso por Marval Buenos Aires. Junio de 1963.
- [12] Ibarra, Emir: *Programación de una línea de mantenimiento*. Presentado al Primer Congreso Argentino de Legislación Técnica y Económica de los Transportes. Publicado en Revista "Energía Industrial". Set-Oct. 1961.
- [13] Kaufmann, A.: *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle*, tomos I y II. Dunod, Paris. 1959 y 1964 respectivamente. Traducidas al castellano por Ceca, México, con el título de "Métodos y Modelos de la investigación de operaciones". Tomos I y II. Las primeras ediciones en castellano del segundo tomo, llevaban por título "Métodos y Modelos de la Programación Dinámica", Ceca. México. Mayo de 1966.
- [14] Lawrence, J. R.: *Operational Research and the Social Sciences*. Editado por Tavistock Publications. Londres, 1966.
- [15] Melese, J.: *La Pratique de la recherche opérationnelle - cinq cas de gestion*. Dunod. Paris, 1967.
- [16] Meylon, M.: *Algunos aspectos todavía no habituales de la investigación operativa*, (Comunicación al Congreso Nacional de Investigación Operativa, Sociedad Española de Investigación Operativa, octubre 1963). "La Investigación Operativa en la Industria", Deusto, 1964.
- [17] Odiorne, George S.: *Administración por objetivos*. El Ateneo, Buenos Aires, 1973.
- [18] Rodríguez Sahagún, Agustín: *Introducción a la investigación operativa como instrumento de la dirección empresarial*. Cap. I de "La Investigación Operativa en la Industria", Deusto. Bilbao. 1964.
- [19] Spilman, M.: *Application pratique de la recherche opérationnelle à l'exploitation des Entreprises*, Eyrolles, 1960.
- [20] Villey, Daniel: *Historia de las grandes doctrinas económicas*, Nova. Bs. As. 1960.

La investigación operacional, al contrario de lo que se piensa, no es una ciencia nueva, sino que es una ciencia antigua. En el siglo XVIII, cuando se creó la primera máquina de vapor, se necesitaba un método para determinar la mejor manera de utilizarla. Este método era la investigación operacional. Desde entonces, la investigación operacional ha crecido y se ha convertido en una disciplina importante en la ingeniería, la economía y la administración.

## SEGUNDA PARTE

# GRAFES - ALGUNAS APLICACIONES

Los grafes son una herramienta matemática que se utiliza para representar y resolver problemas de optimización. Un grafo es un conjunto de nodos (vértices) conectados por aristas (edges). Los grafes se utilizan en una amplia variedad de aplicaciones, desde la ingeniería hasta la economía.

Una de las aplicaciones más comunes de los grafes es la optimización de rutas. En este caso, los nodos representan las estaciones y las aristas representan las rutas entre ellas. El objetivo es encontrar la ruta más corta o la más eficiente entre dos puntos.

Otra aplicación importante de los grafes es la optimización de recursos. En este caso, los nodos representan los recursos y las aristas representan las relaciones entre ellos. El objetivo es encontrar la mejor manera de asignar los recursos a las diferentes actividades.

[1] A. H. Churchman, "Introduction to the Theory of Linear Programming", McGraw-Hill, 1957.

[2] R. W. Cottle, "Linear Programming", Wiley, 1968.

[3] D. Goldfarb, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1970.

[4] G. B. Dantzig, "Linear Programming and Extensions", McGraw-Hill, 1963.

[5] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1971.

[6] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1972.

[7] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1973.

[8] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1974.

[9] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1975.

[10] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1976.

[11] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1977.

[12] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1978.

[13] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1979.

[14] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1980.

[15] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1981.

[16] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1982.

[17] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1983.

[18] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1984.

[19] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1985.

[20] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1986.

[21] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1987.

[22] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1988.

[23] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1989.

[24] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1990.

[25] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1991.

[26] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1992.

[27] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1993.

[28] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1994.

[29] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1995.

[30] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1996.

[31] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1997.

[32] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 1998.

[33] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 1999.

[34] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2000.

[35] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2001.

[36] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2002.

[37] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2003.

[38] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2004.

[39] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2005.

[40] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2006.

[41] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2007.

[42] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2008.

[43] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2009.

[44] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2010.

[45] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2011.

[46] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2012.

[47] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2013.

[48] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2014.

[49] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2015.

[50] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2016.

[51] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2017.

[52] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2018.

[53] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2019.

[54] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2020.

[55] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2021.

[56] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2022.

[57] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2023.

[58] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2024.

[59] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2025.

[60] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2026.

[61] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2027.

[62] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2028.

[63] J. J. Moret, "Linear Programming", Wiley, 2029.

[64] R. M. L. Wong, "Linear Programming", McGraw-Hill, 2030.

## CAPITULO 1

### NOCIONES SOBRE GRAFES

#### A modo de introducción

Según Kaufmann, la Teoría de los grafes es una parte de la matemática moderna que ha dado resultados muy importantes en diferentes dominios del saber humano: economía, estrategia militar, organización industrial, sociología, química, etc.

Aplicada a numerosos problemas ha demostrado ofrecer considerables ventajas sobre los procedimientos analíticos.

Esta teoría no es más que la rama de la Teoría de los Conjuntos que se refiere a las relaciones binarias de un conjunto consigo mismo.

Basándonos en palabras del profesor C. Berge [B.1], podríamos decir que frente a numerosas situaciones que queremos estudiar, una antigua costumbre nos impulsa a trazar, sobre el papel:

- puntos para representar estados, individuos, elementos, cuerpos químicos, etc.
- líneas o flechas para representar la relación que los vincula.

Este hábito del hombre habría sido la causa que dio origen, en muchas disciplinas, a esquemas similares pero que recibieron diferentes nombres: sociogramas, circuitos eléctricos, diagramas de organización, árboles genealógicos, etc.

Sería D. König, el primero en proponer, para tales esquemas, el nombre de "graphes" así como el estudio sistemático de sus propiedades.

En castellano se utilizan las palabras grafes, grafos, gráficos, gráficas, redes, como vocablos equivalentes de "graphes" (francés), "graphs" (inglés), "graphen" (alemán). Nosotros utilizaremos, casi exclusivamente, el término grafes.

En las páginas que siguen se plantean y resuelven algunos problemas que a menudo nos presenta el quehacer económico. Previamente y con el objeto de que pueda seguirse con mayor facilidad las representaciones y los algoritmos de resolución, hemos introducido los conceptos necesarios mínimos.

Habíamos pensado incluirlos en un Anexo; pero entendiendo que desde hace pocos años se difunden estas nociones, hemos tomado como hipótesis de trabajo que el lector las desconoce. Aquellos lectores que, por el contrario, tienen conocimiento de la teoría de grafes, pueden omitir la lectura de estas páginas y pasar, sin ningún inconveniente, a las aplicaciones que se exponen.

## Nociones sobre grafes

Sea  $E$  un conjunto finito de elementos.

Recordemos que un par ordenado está formado por dos elementos dados en un cierto orden donde el primero recibe el nombre de primer componente y el segundo de segundo componente.

Así, dados  $x_1$  y  $x_2$ , podemos formar dos pares ordenados distintos:  $(x_1, x_2)$  y el  $(x_2, x_1)$ . Además, los pares ordenados  $(x_1, x_1)$  y  $(x_2, x_2)$ .

Si  $n$  es el número de elementos del conjunto  $E$ , podremos formar  $n^2$  pares ordenados.

El conjunto de todos los pares ordenados  $(x_i, x_j)$ , donde  $i = 1, \dots, n$  y  $j = 1, \dots, n$ , se llama conjunto producto que simbolizaremos como  $(E \times E)$ .

Del mismo modo que cuando  $x_i$  era un elemento del conjunto escribíamos  $x_i \in E$ , podemos poner  $(x_i, x_j) \in (E \times E)$ .

Veamos un ejemplo:

$$\text{Sea } E = \{x_1, x_2, x_3\}$$

El conjunto de todos los pares ordenados, nos dará

$$E \times E = \{(x_1, x_1); (x_1, x_2); (x_1, x_3); (x_2, x_1); (x_2, x_2); (x_2, x_3); (x_3, x_1); (x_3, x_2); (x_3, x_3)\}$$

Supongamos ahora que ciertos pares ordenados del conjunto  $E \times E$  cumplen una cierta propiedad  $P$  y que los otros no la cumplen.

Podemos decir que estos últimos cumplen la propiedad  $noP$ , que podemos simbolizar  $\bar{P}$ .

En tal caso, dicha propiedad  $P$  efectúa una bipartición del conjunto  $E \times E$ . En efecto el conjunto resulta descompuesto en dos partes que no tienen elementos comunes.

Así por ejemplo, supongamos que la propiedad  $P$  signifique tener a  $x_1$  como primera componente y/o  $x_2$  como segunda.

Los dos subconjuntos serán

$$S_1 = \{(x_1, x_1); (x_1, x_2); (x_1, x_3); (x_2, x_2); (x_3, x_2)\}$$

$$\text{y } S_2 = \{(x_2, x_1); (x_2, x_3); (x_3, x_1); (x_3, x_3)\}$$

Es evidente que  $S_1 \cup S_2 = E \times E$

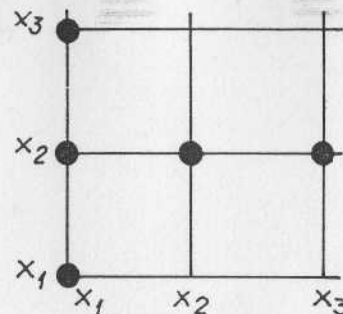
y que  $S_1 \cap S_2 = \emptyset$  donde  $\emptyset$  es el conjunto vacío.

Si realizamos una bipartición del conjunto  $E \times E$  y distinguimos los pares ordenados que pertenecen a una de las partes de los que pertenecen a la otra, obtenemos un grafe.

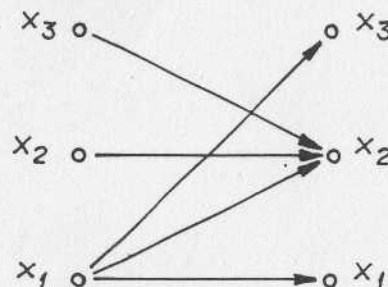
Luego el subconjunto  $S_1$ , por ejemplo, es un grafe de  $E$ .

## Representación de un grafe

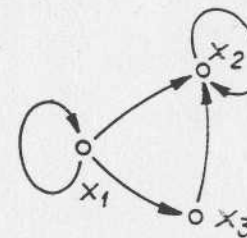
Podemos representarlo de varias formas. Así, para  $S_1$



en grilla



por puntos apareados



por puntos y flechas

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ |
|-------|-------|-------|-------|
| $x_1$ | 1     | 1     | 1     |
| $x_2$ | 0     | 1     | 0     |
| $x_3$ | 0     | 1     | 0     |

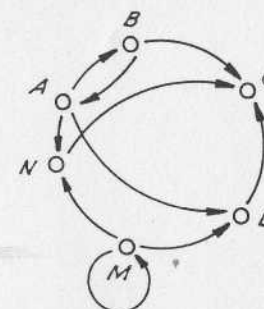
matricialmente

En adelante nos limitaremos prácticamente a la representación sagital (puntos y flechas).

Con el objeto de simplificar la notación, evitando los subíndices, en la mayoría de los casos representaremos con letras mayúsculas, a los elementos del conjunto  $E$ .

## Aplicación multívoca\*

Sea  $E = \{A, B, C, D, M, N\}$ . Podemos representar el siguiente grafe de  $E$ .



\* Hemos mantenido la designación dada por el profesor C. Berge. El profesor Kaumann aclara que sería incorrecto agregar al sustantivo aplicación, el adjetivo multívoca, y utiliza "correspondencia" o también "aplicación de  $X$  en  $X$ ".

Observamos que el subconjunto de elementos  $\{B, D, N\}$ , es el subconjunto de segundos componentes de los pares ordenados que tienen al elemento A como primer componente.

Diremos que la aplicación multívoca de A, que simbolizaremos  $\Gamma \{A\}$  es el subconjunto  $\{B, D, N\}$ . O sea  $\Gamma \{A\} = \{B, D, N\}$ .

Análogamente, podemos hacerlo para los restantes elementos.

$$\Gamma \{B\} = \{A, C\}$$

$$\Gamma \{C\} = \phi$$

$$\Gamma \{D\} = \{C\}$$

$$\Gamma \{M\} = \{D, M, N\}$$

$$\Gamma \{N\} = \{C\}$$

*Nota:* Hemos puesto  $\Gamma \{C\} = \phi$  por cuanto no existe par ordenado cuya primer componente sea C, o de otro modo, partiendo de C no podemos ir a ningún otro elemento de E.

### Elementos del grafe

**Vértice.** Se denomina así a todo elemento del conjunto E. En el grafe representado, los vértices serán A, B, C, D, M y N.

**Arcos.** Se denomina así a cada uno de los elementos del subconjunto de  $E \times E$  que constituye el grafe. Para nuestro ejemplo, los arcos son:

$(A, B); (A, D); (A, N); (B, A); (B, C) \dots (M, M); (M, N)$  y  $(N, C)$ .

### Notación

Un grafe se simbolizará mediante un par ordenado cuya primer componente es el conjunto de vértices y cuyo segundo componente es la aplicación multívoca  $\Gamma$  que establece la correspondencia entre aquellos.

O sea

$$G = (E, \Gamma)$$

Si con U representamos al conjunto de arcos, podemos simbolizarlo también

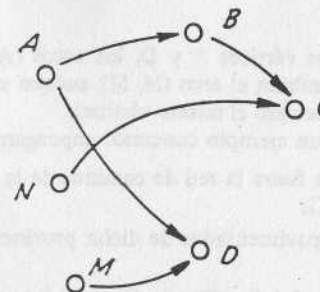
$$G = (E, U)$$

o sea como conjunto de vértices y arcos.

### Grafe parcial

Lo obtendremos suprimiendo uno o varios arcos.

Así:



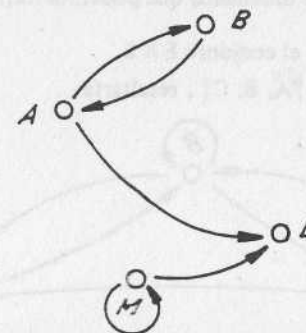
es un grafe parcial del grafe del ejemplo anterior.

Se han suprimido los arcos  $(A, N); (B, A); (D, C); (M, M)$  y  $(M, N)$ .

### Subgrafe

Lo obtenemos si suprimimos uno o varios vértices del grafe dado, y los arcos que tienen uno o ambos extremos en tales vértices suprimidos.

Así



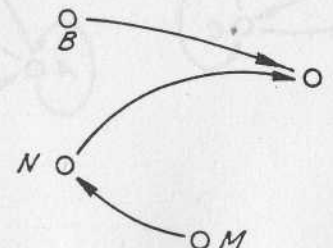
es un subgrafe del correspondiente a nuestro ejemplo. En efecto, hemos suprimido los vértices C y N y los arcos  $(B, C); (N, C); (D, C); (M, N); (A, N)$ .

*Nota:* Se considera que todo grafe es un grafe parcial de si mismo. Análogamente, que es un subgrafe de si mismo.

### Subgrafe parcial

Lo obtenemos suprimiendo uno o varios vértices, los arcos con uno o ambos extremos en los vértices suprimidos y arcos cuyos extremos son vértices que no fueron suprimidos.

Así podemos obtener el siguiente subgrafe parcial.



Hemos suprimido: Los vértices A y D, los arcos (A, B); (B, A); (A, D); (A, N); (D, C); (M, D) y también el arco (M, M) aunque sus extremos son vértices que permanecen (en este caso el mismo vértice).

Con el objeto de dar un ejemplo concreto, supongamos el siguiente caso:

Si el grafe en cuestión fuera la red de caminos de la Provincia de Buenos Aires, que denominaremos G:

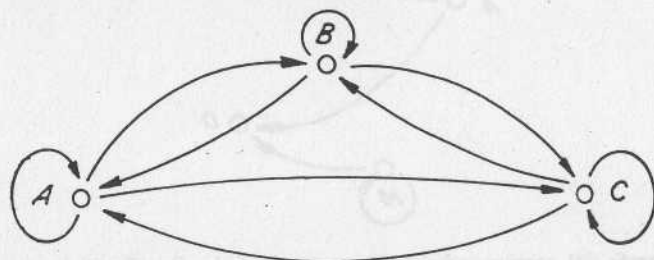
- la red de caminos pavimentados de dicha provincia sería un grafe parcial de G.
- la red de caminos del Partido de General Pueyrredón sería un subgrafe de G.
- la red de rutas pavimentadas de dicho Partido constituiría un grafe parcial del anterior y un subgrafe parcial de G.

### Grafe pleno

Cuando todos los pares ordenados que podemos formar con los elementos de E, son arcos.

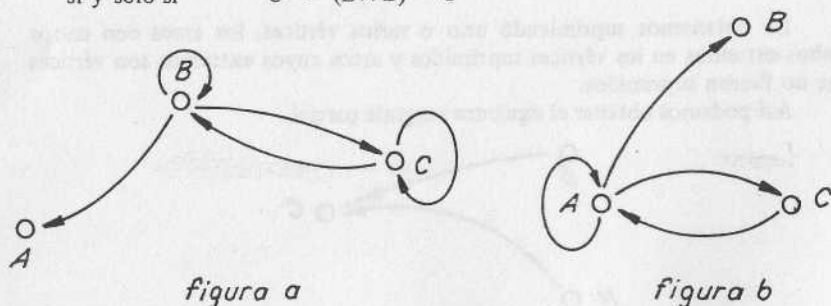
O sea, un grafe pleno es el conjunto  $E \times E$ .

Gráficamente, si  $E = \{A, B, C\}$ , resultaría



### Grafe complementario de un grafe dado

Dado el grafe  $G = (E, U)$   
 diremos que  $G^* = (E, U^*)$  es su complementario  
 sí y sólo si  $U^* = (E \times E) - U$



Así si G está representado por la fig. a);  $G^*$  será el representado por la fig. b). Del mismo modo si G es el representado por la fig. b);  $G^*$  corresponderá al de la fig. a).

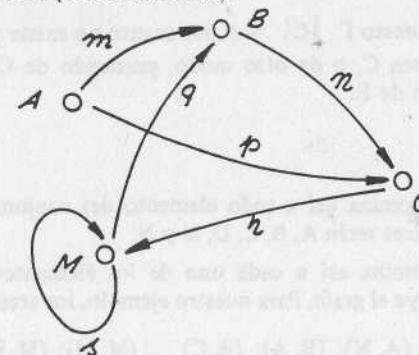
También, se ve fácilmente que el complementario del grafe complementario de un grafe dado, es el grafe dado; o sea

$$(G^*)^* = G$$

### Camino

Es una secuencia de arcos tales que el extremo final de cada arco es extremo inicial del siguiente.

Se lo puede designar mediante la secuencia de arcos que lo forman o por los vértices que contiene (ordenadamente).



Así (m, n); (m, n, r); (r, s, p) o lo que es lo mismo (A, B, C); (A, B, C, M) o (C, M, M, B) son caminos.

### Circuito

Cuando el vértice inicial del camino coincide con el vértice final.

Así en el grafe anterior, (n, r, q.) o (n, r, s, q.) son circuitos. Si los representamos por sus vértices, serían respectivamente (B, C, M, B) o (B, C, M, M, B).

### Bucle

Cuando el circuito contiene solamente dos vértices idénticos (o sea, tiene un sólo arco).

Así (M, M) es un bucle.

### Longitud de un camino

Es el número de arcos que lo forman. Simbolizaremos con  $l(\mu)$  a la longitud del camino.

Así

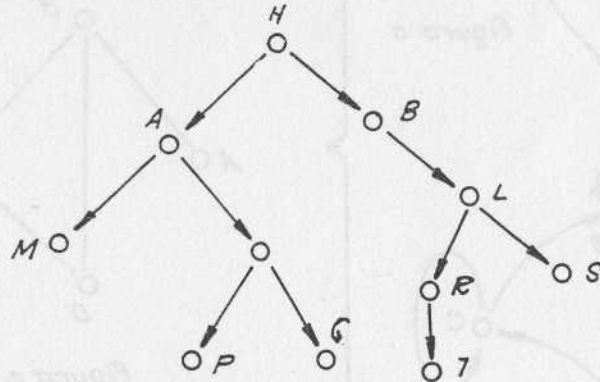
|                       |              |
|-----------------------|--------------|
| si $\mu = (m, n, r,)$ | $l(\mu) = 3$ |
| si $\mu = (M, M)$     | $l(\mu) = 1$ |

## Arborescencia

Llamaremos "arborescencia" a todo grafe sin circuito, tal que:

- Exista uno y sólo un vértice que no sea extremo final de arco. Dicho vértice se llama raíz.
- Cada uno de los vértices restantes es extremo final de un sólo arco.

Gráficamente, un ejemplo sería

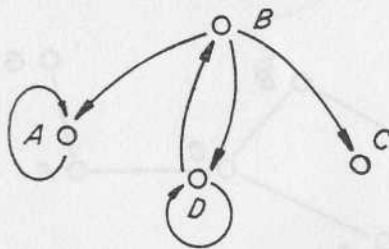


H es la raíz de la arborescencia.

Los vértices M, P, Q, T, S que no son extremos iniciales de arcos, se denominan "hojas" de la arborescencia.

## Arista

Llamaremos arista de un grafe G, a todo par de vértices distintos  $x_i$  y  $x_j$  tales que le corresponda, como mínimo, el arco  $(x_i, x_j)$  o el arco  $(x_j, x_i)$ .



Así, en el grafe representado, existen tres aristas: entre A y B, entre B y D, y entre B y C.

Dicho de otro modo: una arista es un par de vértices vinculados, por un arco (en uno u otro sentido) o por dos arcos de sentidos opuestos.

Simbólicamente, la arista entre  $x_i$  y  $x_j$ , la representaremos  $(x_i, x_j)$ .

El conjunto de aristas de un grafe  $G = (E, U)$  lo simbolizaremos con  $\bar{U}$ .

En el ejemplo  $\bar{U} = \{(A, B); (B, D); (B, C)\}$

## Cadena

Es una secuencia de aristas tales que cada una está vinculada, por uno de sus extremos, como mínimo, con otra arista de la secuencia.

Se la puede representar simbólicamente por las aristas que la forman, o por los vértices que contiene.

En el ejemplo:  $(A, B, D)$ ;  $(A, B, C)$ ; y  $(D, B, C)$  son cadenas.

La longitud de una cadena está dada por el número de aristas que la forman.

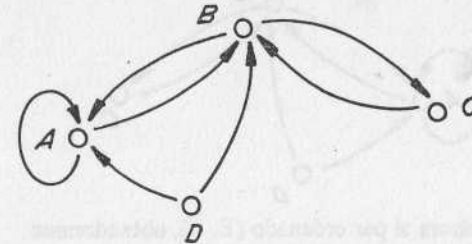
Si  $\bar{\mu} = (D, B, C)$   $l(\bar{\mu}) = 2$

## Ciclo

Es una cadena cerrada.

En el ejemplo anterior no existe ningún ciclo.

En el grafe siguiente,  $(A, B, D, A)$  es un ciclo.

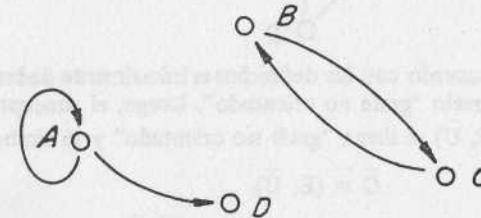


## Grafe conexo

Un grafe G es conexo si entre todo par de vértices existe una cadena.

Así el grafe anterior es conexo.

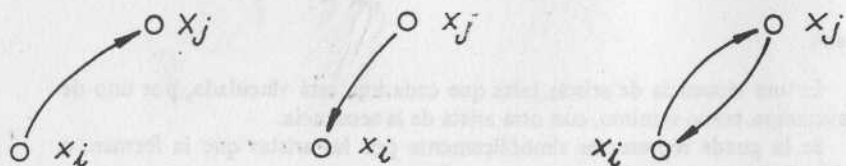
En cambio, el siguiente no será conexo. Vemos que posee dos componentes conexos.



## Grafs no orientados

Cuando vimos el concepto de arista, dijimos que era un par de vértices distintos, vinculados por un arco (en uno u otro sentido) o por dos arcos de sentidos opuestos.

Es decir, estas tres representaciones:

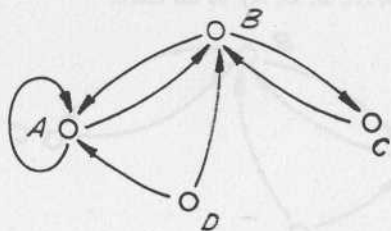


definían la misma arista  $\overline{(x_i, x_j)}$ , y que podemos representar así:

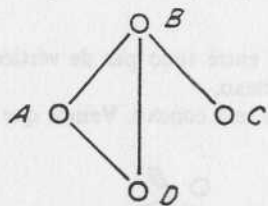


o sea vinculadas por un "arco no orientado", por un arco donde no se tiene más en consideración su sentido.

Si consideramos el siguiente grafo, observamos que el conjunto de aristas es  $\bar{U} = \{(A, B); (D, A); (B, D); (B, C)\}$ :



Si representamos ahora al par ordenado  $(E, \bar{U})$ , obtendremos



que no es un grafo de acuerdo con las definiciones inicialmente dadas, pero que no obstante suele llamársele "grafo no orientado". Luego, el concepto definido por el par ordenado  $(E, \bar{U})$  se llama "grafo no orientado" y lo simbolizaremos

$$\bar{G} = (E, \bar{U})$$

Es fácil ver que a todo grafo  $G = (E, U)$  le podemos asociar uno y sólo un "grafo no orientado"  $\bar{G} = (E, \bar{U})$ , y también: que lo recíproco no es cierto.

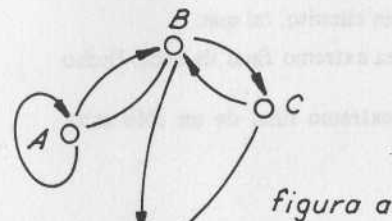


figura a

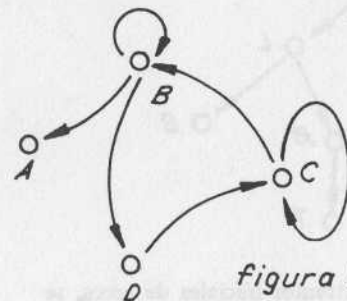


figura b

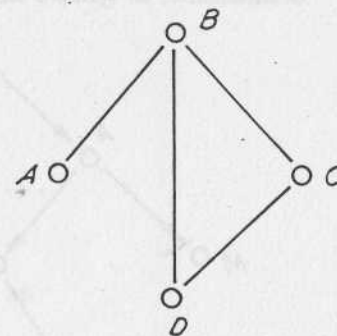


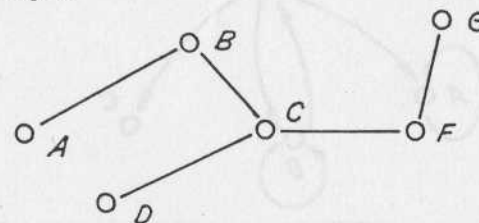
figura c

A los grafes de la fig. a) y fig. b), les corresponde el mismo "grafo no orientado" de la fig. c).

### Arbol

Es un "grafo no orientado", sin ciclos y que tiene por lo menos dos vértices.

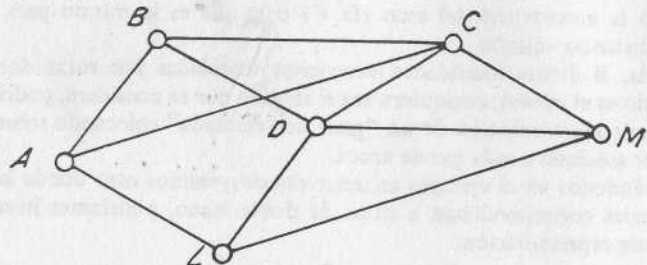
Así por ejemplo:



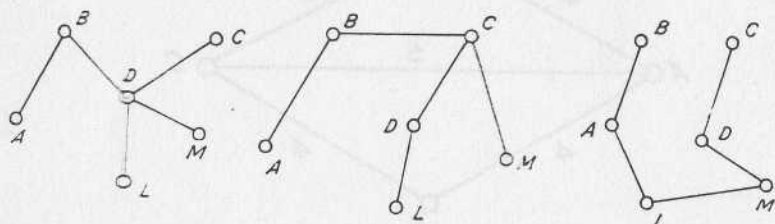
### Arbol parcial de un grafo no orientado

Es un "grafo parcial no orientado" que al mismo tiempo tiene la forma de árbol.

Así por ejemplo en el  $\bar{G}$  conexo



podemos, por ejemplo, deducir los siguientes árboles parciales entre otros.

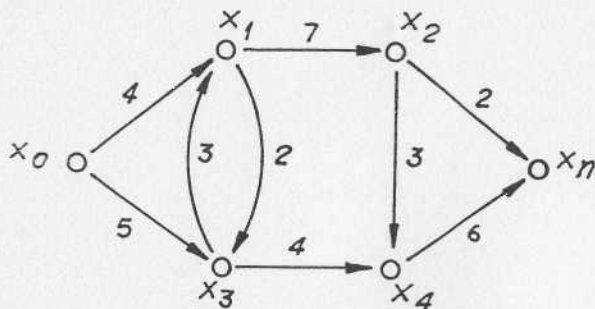


Puede verse fácilmente que si el número de vértices es  $n$ , el número de aristas es  $n - 1$ .

#### Red de transporte

Es un grafo  $G$ , conexo, sin bucles, que posee:

- uno y sólo un vértice al cual no llega ningún arco. En nuestro ejemplo  $x_0$ . Lo denominaremos "entrada".
- uno y sólo un vértice del cual no parten arcos, en nuestro ejemplo  $x_n$ . Se llama "salida".



Además, por los arcos circula una cantidad de materia (flujo) que no puede sobrepasar la capacidad  $C_{ij}$  de cada arco  $(i, j)$ .

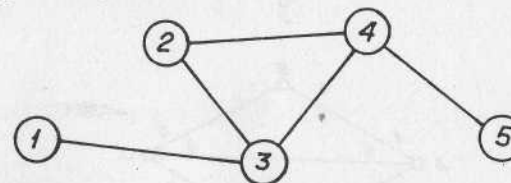
Como ejemplo

| arco<br>( $i, j$ ) | capacidad<br>$C_{ij}$ |
|--------------------|-----------------------|
| $(x_0, x_1)$       | 4                     |
| $(x_1, x_3)$       | 2                     |
| $(x_3, x_1)$       | 3                     |

Citaremos algunos ejemplos del mundo físico que se adecuan a la noción de red de transporte.

| NODOS                    | ARCOS                             | FLUJOS                           |
|--------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| <i>Cruces</i>            | <i>Rutas</i>                      | <i>Vehículos</i>                 |
| Estaciones de bombeo     | Oleoductos (Gasoductos)           | Fluido                           |
| Centros de procesamiento | Rutas de transporte de materiales | Materiales (trabajos en proceso) |
| Aeropuertos              | Rutas aéreas                      | Aviones                          |
| Estaciones               | Rutas entre estaciones            | Omnibus                          |
| Estaciones ferroviarias  | Vías ferroviarias                 | Trenes                           |
| Estaciones repetidoras   | Canales de comunicación           | Información                      |

*Nota:* Algunos autores americanos definen al grafo como un conjunto de puntos, denominados nodos, donde algunos pares de ellos están vinculados por líneas llamadas "ramas" (o arcos, vínculos, cordones, aristas). Así, un grafo sería por ejemplo, el siguiente:



Vemos que coincide con el concepto de "grafo no orientado" que hemos dado antes.

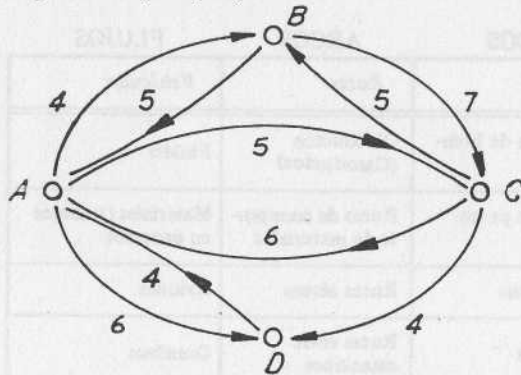
Agregan que una rama se denominará "rama orientada" cuando existe un sentido de dirección asignado de modo que un nodo puede ser considerado como origen de la rama y el otro como destino. Cuando todas las ramas de un grafe son orientadas, se obtendría un grafe orientado. Obsérvese que el grafe orientado así definido coincide con el concepto de grafe expuesto al comienzo.

Y para terminar esta observación, definen a la red de la siguiente manera:

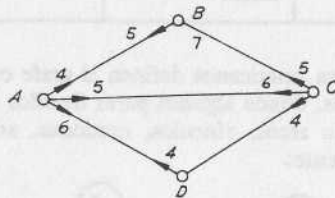
*Una red es un grafe en cuyas ramas existe algún tipo de flujo.*

### Representación simplificada

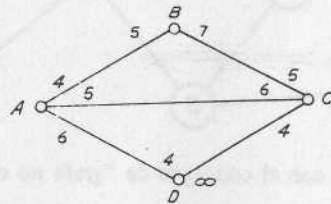
Supongamos que las cuatro localidades A, B, C, D estén vinculadas por rutas de longitud distinta según el sentido de desplazamiento. El grafe que representaría este caso podría ser por ejemplo:



Puede verse que a pesar de que no existe vinculación directa entre B y D, y que la ruta entre C y D es de mano única, ya su representación resulta compleja. Por ello, haremos uso de la siguiente representación:



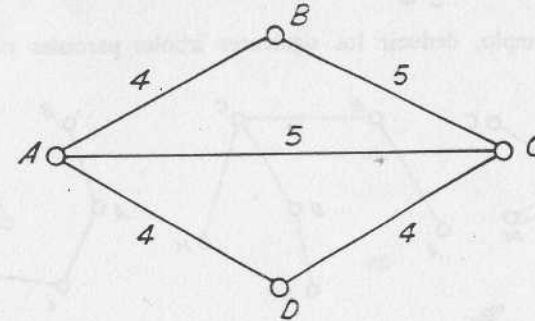
o también



donde el  $\infty$  colocado sobre la rama CD y en las proximidades de D nos está indicando la inexistencia del arco (D, C) o lo que es lo mismo para estos casos, una distancia infinita.

Además, si dichas localidades estuvieran vinculadas por rutas donde el valor asociado es el mismo, cualquiera sea el sentido que se considere, podríamos hacer uso de la representación de un "grafe no orientado" colocando sobre cada arista el valor asociado a cada par de arcos.

Si basándonos en el ejemplo anterior construyéramos otro donde las menores distancias correspondieran a rutas de doble mano, podríamos hacer uso de la siguiente representación:



Conviene recordar que esta representación sigue siendo la de un grafe  $G = (E, U)$  aun cuando tenga el aspecto de un "grafe no orientado"  $\bar{G} = (E, \bar{U})$ .

Resulta evidente que usando estas simplificaciones, la claridad del dibujo es mayor. Esto es importante si pensamos en problemas con mayor número de localidades y rutas.

## CAPITULO 2

### CAMINO ECONOMICO

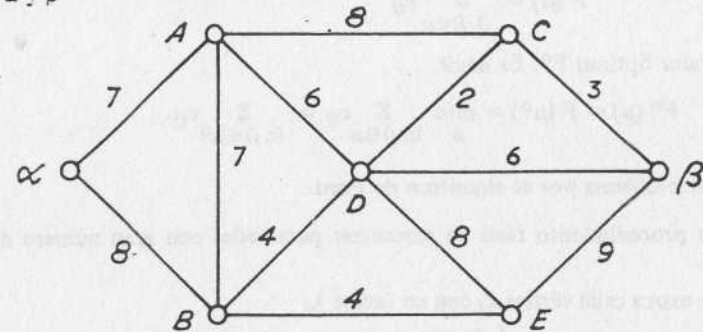
#### Algunas aplicaciones

En las páginas que siguen, trataremos los siguientes problemas:

- Camino económico.
- Camino de longitud óptima.
- Arbol de conexión.
- Flujo a través de una red de transporte.
- Administración de proyectos, por análisis de redes.

#### Camino económico

Sea el  $G = (E, U)$  que representa las distintas rutas que vinculan las ciudades  $\alpha$  y  $\beta$



Los vértices indican las intersecciones de las rutas (ciudades o cruces simplemente). Los números indican, por ejemplo, la longitud en Km de cada tramo. Nuestro objetivo podría ser: determinar el camino más corto entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

Si los números representaran el costo que se experimenta por atravesar cada tramo, buscaríamos el camino de costo mínimo.

Si representaran el tiempo necesario para recorrerlo, teniendo en cuenta todas las condiciones del tránsito, buscaríamos el camino más rápido entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

Si el nodo  $\alpha$  representara al sistema actual, y  $\beta$  al nuevo sistema propuesto. Si los nodos restantes representaran estados intermedios definidos del sistema en transformación, y si los valores asociados a los arcos una estimación cuantificada de las resistencias a la transformación entre estados, podríamos ser de

interés conocer la sucesión de transformaciones parciales que nos diera la resistencia total mínima.

Generalizando, si asociamos a cada arco  $(x_i, x_j)$ , un valor  $c(x_i, x_j)$ , buscaríamos un camino  $\mu$ , para el cual

$$F(\mu) = \sum_{(x_i, x_j) \in \mu} c(x_i, x_j) \text{ sea mínimo}$$

Para simplificar la notación podríamos poner

$$(x_i, x_j) = u \quad \forall i \neq j$$

$$c(x_i, x_j) = c(u)$$

$$\text{o también} \quad c(x_i, x_j) = c_{ij}$$

luego la función económica a optimizar (minimizar) sería

$$F(\mu) = \sum_{u \in \mu} c(u)$$

Sintetizando: Cuando la situación que examinamos, la podamos representar por un grafo  $G = (E, U)$ , en el cual asociamos los valores  $c_{ij}$  a los arcos; nuestro problema será encontrar el camino para el cual la suma de los valores asociados a los arcos, es mínima. Dicho camino será  $\mu^0$  y la función económica, definida como

$$F(\mu) = \sum_{(i, j) \in \mu} c_{ij}$$

tomará el valor óptimo  $F^0$ . Es decir

$$F^0(\mu) = F(\mu^0) = \min_{\mu} \sum_{(i, j) \in \mu} c_{ij} = \sum_{(i, j) \in \mu^0} c_{ij}$$

#### Solución del problema por el algoritmo de Ford

Es un procedimiento fácil de mecanizar para redes con gran número de vértices.

1) Se marca cada vértice  $x_i$  con un índice  $\lambda_i$

$$\text{se tomará} \quad \begin{cases} \lambda_\alpha = 0 \\ \lambda_i = +\infty \quad \forall i \neq \alpha \end{cases}$$

2) Se busca un arco  $(x_i, x_j)$  para el cual

$$\lambda_j - \lambda_i > c(x_i, x_j)$$

3) Se reemplaza  $\lambda_j$  por un  $\lambda'_j$  tal que

$$\lambda'_j = \lambda_i + c(x_i, x_j)$$

$$\text{es claro que} \quad \lambda'_j < \lambda_j$$

$$\text{y que} \quad \lambda'_j > 0 \quad \forall j \neq \alpha$$

4) Se repiten los pasos 2) y 3) hasta que ningún arco permita reducir más a ninguno de los índices.

El último valor que se obtenga para  $\lambda_\beta$  será la distancia mínima entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

La segunda parte del algoritmo nos permite detectar la ruta económica. Se busca un vértice  $x_{k_1}$  tal que

$$\lambda_\beta - \lambda_{x_1} = c(x_{k_1}, \beta)$$

donde  $x_{k_1}$  es el último vértice que se utilizó para disminuir el  $\lambda_\beta$ .

Luego se busca un  $x_{k_2}$  tal que

$$\lambda_{k_1} - \lambda_{x_2} = c(x_{k_2}, x_{k_1})$$

Prosiguiendo la búsqueda en forma análoga llegaremos hasta

$$x_{k_{n+1}} = \alpha$$

El camino

$$\mu^0 = (\alpha, x_{k_n}, x_{k_{n-1}}, \dots, x_{k_2}, x_{k_1}, \beta)$$

es el camino económico entre  $\alpha$  y  $\beta$ . y  $\lambda_\beta$  la "longitud"\* de dicho camino, o sea el valor óptimo de la función económica.

*Prueba:* Hemos dicho que una vez efectuadas todas las reducciones posibles, el último valor de  $\lambda_\beta$  obtenido era precisamente el valor del camino económico que vincula  $\alpha$  con  $\beta$ .

En efecto, sea  $\mu$  un camino cualquiera que vincula ambos vértices. Es decir,

$$\mu = \{\alpha, x_1, x_2, \dots, x_n, \beta\}$$

Como el proceso de reducción ha concluido, podemos poner

$$\lambda_\beta - \lambda_{\alpha_n} \leq c(x_n, \beta)$$

$$\lambda_{x_n} - \lambda_{x_{n-1}} \leq c(x_{n-1}, x_n)$$

$$\lambda_{x_1} - \lambda_\alpha \leq c(\alpha, x_1)$$

$$\text{S.m.a.m.} \quad \lambda_\beta - \lambda_\alpha \leq c(\alpha, x_1) + \dots + c(x_{n-1}, x_n) + c(x_n, \beta)$$

$$\text{o sea} \quad \lambda_\beta - \lambda_\alpha \leq F(\mu)$$

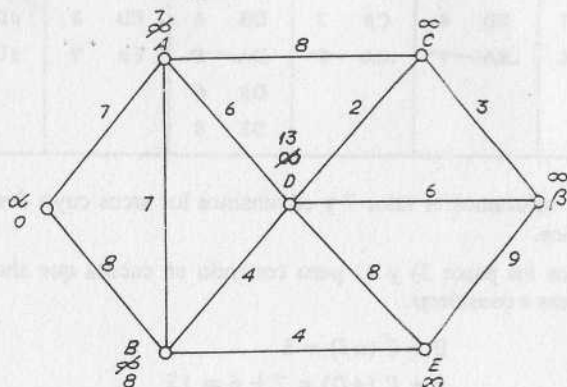
$$\text{como } \lambda_\alpha = 0 \quad \text{es} \quad \lambda_\beta \leq F(\mu)$$

Luego, para todo camino  $\mu$ , es  $F(\mu) \geq \lambda_\beta$ . Luego, si para  $\mu^0$  se cumple

\*Por razones didácticas preferimos reservar la palabra "longitud" para indicar el número de arcos, en concordancia con la definición anteriormente dada sobre "longitud de un camino" (pág. 27).

que  $F(\mu^0) = \lambda_B$ , el camino  $\mu^0$  es el camino óptimo, y  $F(\mu^0)$  es el valor mínimo de la función económica.

#### Aplicación al ejemplo



vemos que

$$\lambda_A - \lambda_\alpha = \infty > 7$$

puedo entonces

$$\lambda'_A = \lambda_\alpha + 7 = 7$$

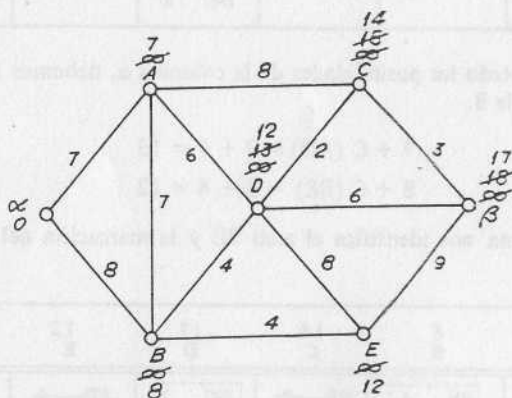
del mismo modo

$$\lambda'_B = 0 + 8 = 8$$

$$\lambda'_D = \lambda_A + 6 = 13$$

-----

En la figura siguiente se hacen todas las reducciones



Vemos que  $x_{k_1} = c$  pues  $\lambda_B - \lambda_C = c(C, \beta)$   
en efecto  $17 - 14 = 3$

Así siguiendo, determinamos

$$x_{k_2} = D \quad x_{k_3} = B \quad x_{k_4} = \alpha$$

O sea

$$\mu^0 = (\alpha, B, D, C, \beta)$$

*Aclaración:* La segunda parte del algoritmo puede trabajarse de una manera más cómoda, y que es la siguiente:

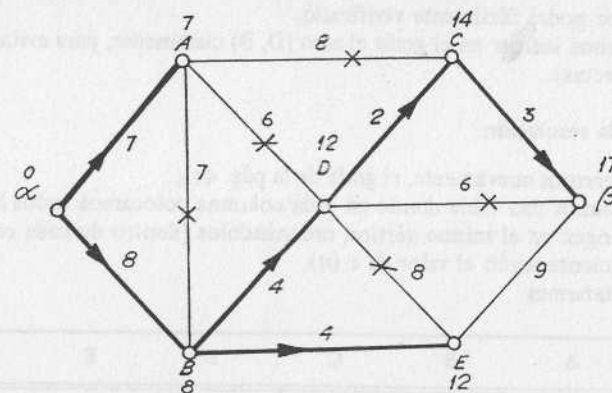
Identifiquemos el grafe parcial formado por todos los arcos para los cuales se verifica que

$$\lambda_j - \lambda_i = c(x_i, x_j)$$

Esto se puede realizar directamente en el grafe sobre el cual hicimos las reducciones, reforzando (o usando color) las líneas que los representan.

En redes mayores recomendamos el uso de papel transparente, para efectuar las reducciones e identificación posterior del mencionado grafe parcial. De ese modo no correremos el riesgo de alterar la información básica. Lo hemos comprobado muy adecuado para la resolución manual de redes más complejas.

Procediendo de acuerdo con lo expuesto, obtendremos:



Vemos que además nos quedan indicados todos los caminos óptimos entre  $\alpha$  y cada uno de los vértices. Es decir que esta pequeña variante nos suministra una mayor información.

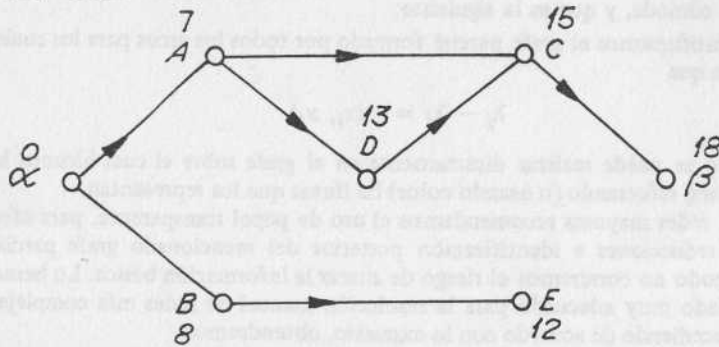
Así

|                                                   |   |                                  |
|---------------------------------------------------|---|----------------------------------|
| $\mu_{\alpha A}^0 = (\alpha, A)$                  | y | $F^0(\mu_{\alpha A}^0) = 7$      |
| $\mu_{\alpha B}^0 = (\alpha, B)$                  |   | $F^0(\mu_{\alpha B}^0) = 8$      |
| $\mu_{\alpha C}^0 = (\alpha, B, D, C)$            |   | $F^0(\mu_{\alpha C}^0) = 14$     |
| $\mu_{\alpha D}^0 = (\alpha, B, D)$               |   | $F^0(\mu_{\alpha D}^0) = 12$     |
| $\mu_{\alpha E}^0 = (\alpha, B, E)$               |   | $F^0(\mu_{\alpha E}^0) = 12$     |
| $\mu_{\alpha \beta}^0 = (\alpha, B, D, C, \beta)$ |   | $F^0(\mu_{\alpha \beta}^0) = 17$ |

### Ejercicio propuesto

Solicitamos al lector que aplique el algoritmo explicado, al grafo resultante de considerar la etapa entre B y D como de "mano única", en el sentido (D, B). Todo lo demás permanece igual al ejemplo que terminamos de resolver.

Si la ruta entre B y D fuera de "mano única", con el sentido (D, B); se obtendría el siguiente resultado



El lector podrá fácilmente verificarlo.

(Sugerimos indicar en el grafo el arco (D, B) claramente, para evitar reducciones incorrectas).

### Otra forma de resolución

Consideremos nuevamente, el grafo de la pág. 41).

Construimos una tabla donde en cada columna colocamos todos los arcos que tienen origen en el mismo vértice, ordenándolos (dentro de cada columna) en forma creciente según el valor de  $c(u)$ .

Así obtenemos

| $\alpha$     | A    | B           | C          | D          | E          | $\beta$     |
|--------------|------|-------------|------------|------------|------------|-------------|
| $\alpha A$ 7 | AD 6 | BE 4        | CD 2       | DC 2       | EB 4       | $\beta C$ 3 |
| $\alpha B$ 8 | AB 7 | BD 4        | $C\beta$ 3 | DB 4       | ED 8       | $\beta D$ 6 |
|              | AC 8 | BA 7        | CA 8       | DA 6       | $E\beta$ 9 | $\beta E$ 9 |
|              |      | $B\alpha$ 8 |            | $D\beta$ 6 |            |             |
|              |      |             |            | DE 8       |            |             |

- 1) Damos al vértice que consideramos entrada a la red, el valor 0 que colocamos encima de su símbolo.
- 2) Eliminamos todos los arcos que tengan dicho vértice como destino.
- 3) Seleccionamos el arco  $\alpha A$  pues nos da la menor suma  $0 + 7$  (en este caso es única). Lo encerramos con   .

| $\alpha$                                                                                 | 7<br>A | B               | C               | D               | E          | $\beta$     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|--------|-----------------|-----------------|-----------------|------------|-------------|
| <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">7<br/><math>\alpha A</math></span> | AD 6   | BE 4            | CD 2            | DC 2            | EB 4       | $\beta C$ 3 |
| $\alpha B$ 8                                                                             | AB 7   | BD 4            | $C\beta$ 3      | DB 4            | ED 8       | $\beta D$ 6 |
|                                                                                          | AC 8   | <del>BA 7</del> | <del>CA 8</del> | <del>DA 6</del> | $E\beta$ 9 | $\beta E$ 9 |
|                                                                                          |        |                 |                 | $D\beta$ 6      |            |             |
|                                                                                          |        |                 |                 | DE 8            |            |             |

- 4) Sobre A colocamos el valor 7 y eliminamos los arcos cuyo destino es este vértice.

- 5) Repetimos los pasos 3) y 4) pero teniendo en cuenta que ahora hay dos vértices a considerar.

$$0 + C(\alpha\beta) = 8$$

$$7 + C(AD) = 7 + 6 = 13$$

La menor suma la produce el arco  $\alpha\beta$ . Luego colocamos 8 sobre B y eliminamos los arcos que tengan como destino dicho vértice.

Nos quedaría

| $\alpha$                                                                                 | 7<br>A | 8<br>B | C          | D          | E          | $\beta$     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|------------|------------|------------|-------------|
| <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">7<br/><math>\alpha A</math></span> | AD 6   | BE 4   | CD 2       | DC 2       | ED 4       | $\beta C$ 3 |
| <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">8<br/><math>\alpha B</math></span> | AC 8   | BD 4   | $C\beta$ 3 | $D\beta$ 6 | $E\beta$ 9 | $\beta D$ 6 |
|                                                                                          |        |        |            | DE 8       |            | $\beta E$ 9 |

- 6) Hemos agotado las posibilidades de la columna  $\alpha$ , debemos tratar sólo con la A y la B.

$$7 + C(AD) = 7 + 6 = 13$$

$$8 + C(BE) = 8 + 4 = 12$$

La menor suma nos identifica el arco BE y la marcación del vértice E con el valor 12.

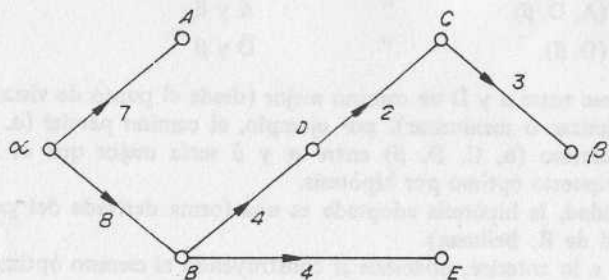
| $\alpha$                                                                                 | 7<br>A          | 8<br>B                                                                | 14<br>C                                                                                | 12<br>D                                                               | 12<br>E                          | 17<br>$\beta$                     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">7<br/><math>\alpha A</math></span> | <del>AD 6</del> | <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">4<br/>BE</span> | <del>CD 2</del>                                                                        | <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">2<br/>DC</span> | <del>ED 4</del>                  | <del><math>\beta C</math> 3</del> |
| <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">8<br/><math>\alpha B</math></span> | <del>AC 8</del> | <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">4<br/>BD</span> | <span style="border: 1px dashed black; padding: 2px;">3<br/><math>C\beta</math></span> | <del><math>D\beta</math> 6</del>                                      | <del><math>E\beta</math> 9</del> | <del><math>\beta D</math> 6</del> |
|                                                                                          |                 |                                                                       |                                                                                        | <del>DE 8</del>                                                       |                                  | <del><math>\beta E</math> 9</del> |

Sobre esta figura reiteramos el procedimiento tachando los arcos que debían eliminarse.

Así marcáremos luego D con 12 seleccionando (B, D); luego C con 14 seleccionando (D, C) y finalmente  $\beta$  con 17 por selección del arco (C,  $\beta$ ).

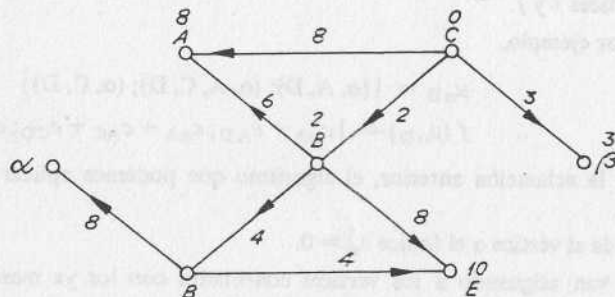
Los números colocados sobre cada vértice dan las distancias mínimas desde  $\alpha$  hasta el vértice considerado.

El conjunto de arcos seleccionados nos forma el grafe parcial de distancias mínimas desde  $\alpha$  a los demás vértices.



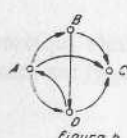
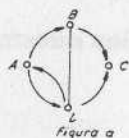
### Ejercicio

Proponemos al lector que usando esta disposición de cálculo, efectúe la determinación de las distancias mínimas desde C a todos los demás vértices. Obtendrá fácilmente el siguiente resultado



### Otro ejemplo

Hasta ahora, y por el tipo de problema físico planteado, no habíamos considerado grafes en los cuales sus aristas se "encontraran" en puntos distintos a sus vértices. Los grafes eran planares. Así el grafe de fig. a) es planar: no así el de la fig. b).

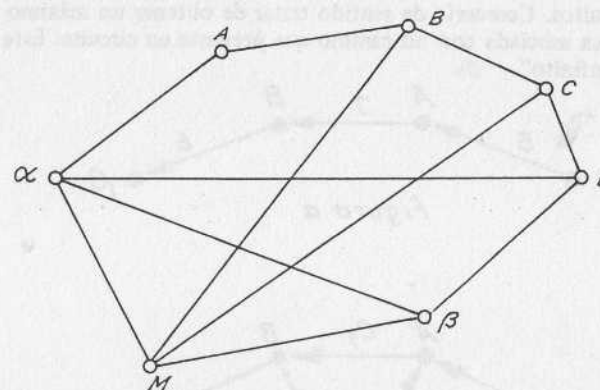


Habíamos tratado con redes de caminos; era evidente que no podemos trazar dos rutas, por ejemplo entre las localidades A y C y entre B y D que no diera lugar a la presencia de un cruce. Dicho cruce es entonces un vértice (X) y las distancias de los arcos que debemos considerar en el problema sería C (A, X); C (X, C); C (B, X); y C (D, X). De no hacerlo los resultados a obtener serían erróneos.

Una excepción podríamos imaginar. Si la ruta A, C se construye por el sistema de "peaje" y sólo se contemplan accesos en A y en C exclusivamente, es evidente que la ruta A, C y la (B, D) se cruzarán a diferente nivel; en tal caso incluir el vértice X nos conduciría ahora a resultados erróneos.

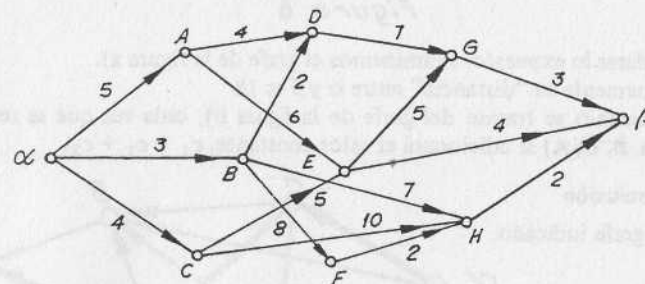
El caso expuesto puede parecer demasiado artificial ya que generalmente las rutas que se "cruzan" a diferente nivel, tienen accesos que las vinculan.

Pero si en lugar de rutas terrestres, consideramos rutas aéreas, resulta fácil concebir que los vértices representen aeropuertos exclusivamente y que los arcos que representan dichas rutas, pueden cortarse (en la representación) en puntos que no sean vértices del grafe.



Así el grafe anterior podría representar los recorridos que las aerolíneas efectúan para vincular los diferentes aeropuertos.

Hechas las aclaraciones anteriores, sea el grafe siguiente:



Supongamos que  $\alpha$  significa el primer estado de un proceso tecnológico y  $\beta$  su estado final, por ejemplo, producto terminado; los arcos representan subprocesos cuyos costos figuran sobre cada arco. Sea nuestro problema: determinar el proceso tecnológico más económico.

Fácilmente se obtiene su solución. El costo mínimo es de 12 y la sucesión de subprocesos que forman el proceso óptimo está representado por el camino formado por los arcos  $(\alpha, B)$ ,  $(B, H)$  y  $(H, \beta)$ .

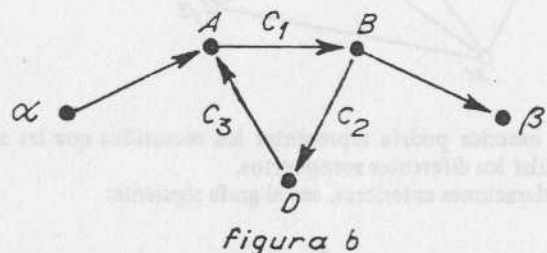
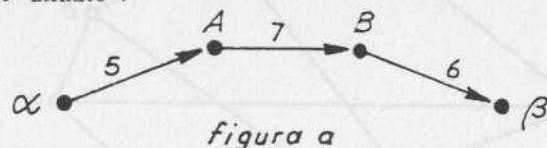
es decir:  $\mu^0 = (\alpha, B, H, \beta) \quad F^0 = 12$

Sugerimos al lector que efectúe la verificación.

#### Caso de maximización

Si en un grafe del tipo de los propuestos, los valores asociados a los arcos representarían beneficios, utilidades, etc., nuestro objetivo sería encontrar el camino que maximizara el beneficio total.

Previamente conviene aclarar que tales situaciones nos llevan a obtener un grafe sin circuitos. Carecería de sentido tratar de obtener un máximo de la función económica asociada con un camino que presente un circuito. Este sería evidentemente "infinito".



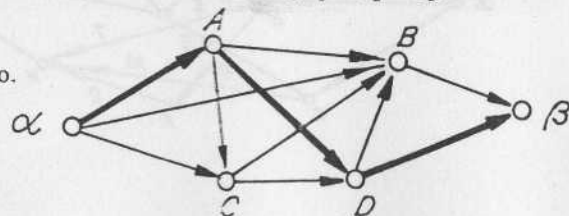
Para aclarar lo expuesto, examinemos el grafe de la figura a).

Evidentemente su "distancia" entre  $\alpha$  y  $\beta$  es 18.

Si en cambio se tratase del grafe de la figura b), cada vez que se recorra el circuito  $(A, B, D, A)$  se adicionará el valor constante,  $c_1 + c_2 + c_3$ .

#### Forma de resolución

Sea el grafe indicado.



Adoptemos la siguiente hipótesis: Si el camino óptimo entre  $\alpha$  y  $\beta$  pasa por los vértices A y D; los caminos parciales entre tales vértices deben ser también óptimos.

Así, por ejemplo, tendríamos los siguientes caminos parciales

|                  |                       |              |
|------------------|-----------------------|--------------|
| $(\alpha, A)$    | que será óptimo entre | $\alpha$ y A |
| $(\alpha, A, D)$ | "                     | $\alpha$ y D |
| $(A, D)$         | "                     | A y D        |
| $(A, D, \beta)$  | "                     | A y $\beta$  |
| $(D, \beta)$     | "                     | D y $\beta$  |

Si existiese entre  $\alpha$  y D un camino mejor (desde el punto de vista que se persigue: minimizar o maximizar), por ejemplo, el camino parcial  $(\alpha, C, D)$ , entonces, el camino  $(\alpha, C, D, \beta)$  entre  $\alpha$  y  $\beta$  sería mejor que el camino  $(\alpha, A, D, \beta)$ , supuesto óptimo por hipótesis.

(En realidad, la hipótesis adoptada es una forma derivada del principio de optimalidad de R. Bellman).

En base a lo anterior, podemos ir construyendo el camino óptimo entre  $\alpha$  y  $\beta$ , calculando los caminos parciales óptimos entre vértices.

#### Algoritmo

Definamos previamente a:

$f(\mu_{ij})$  como la función económica asociada al camino parcial  $\mu_{ij}$  entre los vértices  $i$  y  $j$ .

Así, por ejemplo,

$$\mu_{\alpha D} = \{(\alpha, A, D); (\alpha, A, C, D); (\alpha, C, D)\}$$

$$\therefore f(\mu_{\alpha D}) = \{c_{\alpha A} + c_{AD}; c_{\alpha A} + c_{AC} + c_{CD}; c_{\alpha C} + c_{CD}\}$$

Hecha la aclaración anterior, el algoritmo que podemos aplicar es el siguiente:

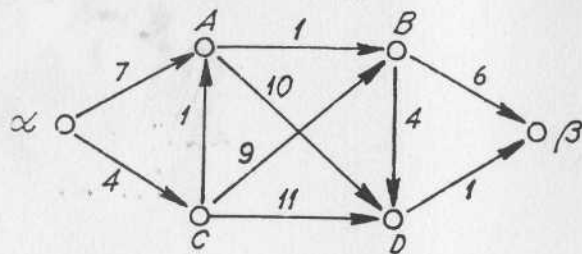
- 1) Se da al vértice  $\alpha$  el índice  $\lambda_\alpha = 0$ .
- 2) Se van asignando a los vértices conectados con los ya marcados ( $i$ ) un índice  $\lambda_j$  dado por

$$\lambda_j = \lambda_i + \max f(\mu_{ij})$$

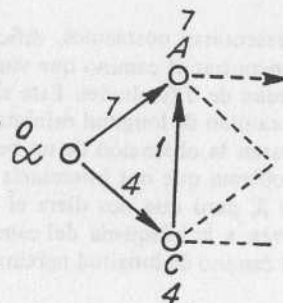
- 3) El paso 2) se repite hasta alcanzar el vértice  $\beta$ .
- 4) Se identifica el grafe parcial formado por los arcos para los cuales

$$\lambda_j - \lambda_i = c_{ij}$$

Ejemplo: En el grafe representado se quiere encontrar el camino óptimo entre  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $F(\mu_{\alpha\beta})$  sea máxima.



Comenzamos haciendo  $\lambda_\alpha = 0$



Para obtener  $\lambda_A$ , vemos que

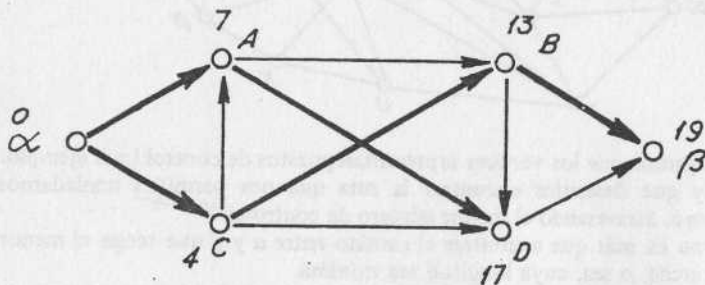
$$f_{\alpha A} = \{7; 4 + 1 = 5\}$$

$$\therefore \max f_{\alpha A} = 7$$

$$\text{luego } \lambda_A = 0 + 7 = 7$$

Análogamente,  $\lambda_C = 4$ .

Sugerimos al lector que verifique el resultado que se indica a continuación.



## Ejercicio

Proponemos al lector que:

- 1) Utilice como paso 2) del algoritmo descrito

$$\lambda_j = \lambda_i + \min f(\mu_{ij})$$

y calcule nuevamente el camino económico en los grafes correspondientes a los ejemplos donde buscábamos minimizar la función económica.

- 2) Analice la similitud entre este algoritmo y la disposición tabular que utilizamos al principio de este tema.

## Otra forma de resolverlo

Podríamos haber utilizado el algoritmo de Ford, ya visto en la pág. 38 pero con las siguientes modificaciones.

- 1) A todo vértice  $x_i$  se lo marca inicialmente con un índice  $\lambda_i = 0$ .

- 2) Se buscan arcos para los cuales

$$\lambda_j - \lambda_i < c(x_i, x_j)$$

- 3) Se reemplaza  $\lambda_j$  por un  $\lambda'_j$  tal que

$$\lambda'_j = \lambda_i + c(x_i, x_j)$$

- 4) Se repiten los pasos 2) y 3) hasta que ningún arco permita incrementar algún  $\lambda_j$ .

El último valor que se obtenga para  $\lambda_\beta$  es la distancia máxima entre  $\alpha$  y  $\beta$ . El resto es igual.

## CAPITULO 3

### CAMINO DE LONGITUD OPTIMA

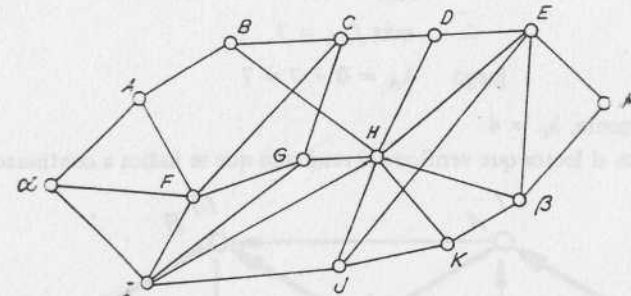
Supongamos que entre  $\alpha$  y  $\beta$  existiesen los estados intermedios indicados por los restantes vértices.

Si estos últimos vértices representaran obstáculos, dificultades, de igual importancia, nos podría interesar encontrar el camino que vincula  $\alpha$  y  $\beta$  y que además presenta el menor número total de dificultades. Este tipo de consideraciones nos llevaría a la búsqueda del camino de longitud mínima.

Si por el contrario, representaran la obtención de un beneficio (también igual en todos esos vértices), el problema que nos interesaría consistiría en detectar la ruta que nos vincule  $\alpha$  y  $\beta$ , pero que nos diera el mayor beneficio total. Tales consideraciones nos llevan a la búsqueda del camino formado por el mayor número de arcos, o sea, del camino de longitud máxima.

#### Camino de longitud mínima

Sea el siguiente grafo:



Supongamos que los vértices representan puestos de control (por ejemplo: de peaje), y que deseamos encontrar la ruta que nos permitirá trasladarnos desde  $\alpha$  hasta  $\beta$ , atravesando el menor número de controles.

Esto no es más que encontrar el camino entre  $\alpha$  y  $\beta$  que tenga el menor número de arcos, o sea, cuya longitud sea mínima.

Recordemos que habíamos definido como longitud,  $l(\mu)$ , al número de arcos que constituían a un camino  $\mu$ .

Es decir, nuestro problema es encontrar

$$\mu = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

tal que  $F(\mu) = l(\mu)$  mínima

Si asocio a cada arco un valor  $c(u) = 1$ , es evidente que resulta un caso particular del camino económico.

En efecto, en el problema anterior debíamos buscar un camino  $\mu$  que optimizara

$$F(\mu) = \sum_{u \in \mu} c(u)$$

Sea  $\mu(u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $c(u) = 1 \forall u$

$$F(\mu) = \sum_{u \in \mu} c(u) = n = l(\mu)$$

Resolviéndolo por las técnicas ya explicadas es fácil verificar que

$$\mu^0 = (\alpha, I, H, \beta) \quad \text{y que} \quad l(\mu^0) = 3$$

No obstante lo expuesto daremos un algoritmo particular para este problema.

1) Se marca el vértice  $\alpha$  con el índice 0.

2) Para todos los restantes se aplica el siguiente razonamiento:

Si todos los vértices marcados con el índice  $i$  forman un conjunto  $A(i)$  conocido, se marca con el índice  $i+1$ , a todos los vértices del conjunto

$$A(i+1) = \{x/x \in \Gamma A(i), x \notin A(k) \forall k \leq i\}$$

o sea  $x \in \Gamma A(i)$

todos los vértices que sean destino de arcos cuyo origen sean vértices de  $A(i)$ , es decir, vértices marcados.

$$x \notin A(k) \forall k \leq i$$

pero que no estén marcados con índices inferiores o iguales a  $i$ .

3) Se detiene el proceso cuando se marca el vértice  $\beta$ . El índice asignado a  $\beta$  representa la longitud del camino óptimo entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Sea  $n$  dicho valor.

Si  $\beta$  fuese inalcanzable, el problema propuesto carecería de solución.

La segunda parte del algoritmo nos permitirá identificar dicho camino óptimo.

Como  $\beta \in A(n)$

consideraremos los vértices

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n = \alpha$$

tales que

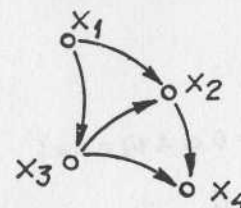
$$\beta_1 \in A(n-1) \quad \beta_1 \in \Gamma^{-1} \beta^*$$

$$\beta_2 \in A(n-2) \quad \beta_2 \in \Gamma^{-1} \beta_1$$

$$\beta_n \in A(0) \quad \beta_n \in \Gamma^{-1} \beta_{n-1}$$

El camino  $\mu = (\alpha, \beta_{n-1}, \dots, \beta_2, \beta_1, \beta)$  es el camino buscado.

\*  $\Gamma^{-1}$  significa la aplicación inversa.  
Recordemos que dado el grafo



$$\begin{aligned} \Gamma(x_1) &= \{x_3, x_2\} & \Gamma(x_3) &= \{x_2, x_4\} \\ \Gamma(x_2) &= \{x_4\} & \Gamma(x_4) &= \emptyset \end{aligned}$$

luego definimos a  $\Gamma^{-1}$

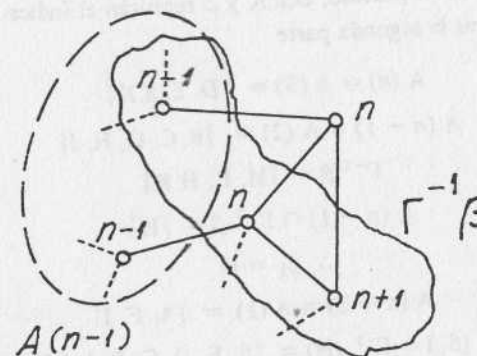
$$\Gamma^{-1}(x_1) = \emptyset \quad \Gamma^{-1}(x_2) = \{x_1, x_3\} \quad \Gamma^{-1}(x_3) = \{x_1, ?\}$$

$$\Gamma^{-1}(x_4) = \{x_2, x_3\}$$

es decir  $\Gamma^{-1}(x)$  nos da el subconjunto de vértices que son origen de los arcos cuyo destino es  $x$ .

Con respecto a la notación

$$\beta_1 \in A(n-1), \quad \beta_1 \in \Gamma^{-1} \beta$$

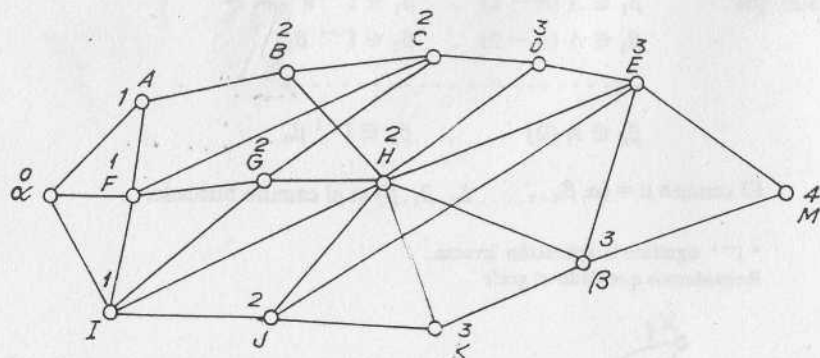


es fácil interpretarla; podría escribirse

$$\beta_1 \in A(n-1) \cap \Gamma^{-1} \beta$$

No necesariamente nos dará un elemento único.

Apliquemos lo expuesto a nuestro ejemplo.



1) Damos a  $\alpha$  el índice 0.

2) El conjunto de vértices marcados con  $i = 0$  es  $A(i) = \{\alpha\}$  el conjunto

$$A(i+1) = \{A, F, I\}$$

luego A, F e I recibirán el índice 1.

3) Ahora, el conjunto de vértices marcados con  $i = 1$  es  $\{A, F, I\}$  y el

$$A(i+1) = \{B, C, G, H, J\}$$

en efecto  $\Gamma A(i) = \{\alpha, A, F, I, B, C, G, H, J\}$

pero  $\{\alpha, A, F, I\} \subset A(k)$  donde  $k \leq 1$

luego sólo los vértices B, C, G, H y J recibirán el índice 2.

4) Continuando el proceso, D, E, K y  $\beta$  recibirán el índice 3. Apliquemos la segunda parte

$$A(n) = A(3) = \{D, E, \beta, K\}$$

$$A(n-1) = A(2) = \{B, C, G, H, J\}$$

$$\Gamma^{-1} \beta = \{M, E, H, K\}$$

$$A(n-1) \cap \Gamma^{-1} \beta = \{H\}$$

$$\therefore \beta_1 = H$$

$$A(n-2) = A(1) = \{A, F, I\}$$

$$\Gamma^{-1}(\beta_1) = \Gamma^{-1}(H) = \{\beta, E, D, G, B, I, J, K\}$$

$$A(n-2) \cap \Gamma^{-1}(\beta_1) = \{I\}$$

$$\therefore \beta_2 = I$$

$$A(0) = \alpha$$

$$\Gamma^{-1}(\beta_2) = \Gamma^{-1}(I) = \{\alpha, F, G, H, J\}$$

$$A(0) \cap \Gamma^{-1}(\beta_2) = \{\alpha\}$$

$$\therefore \beta_3 = \alpha$$

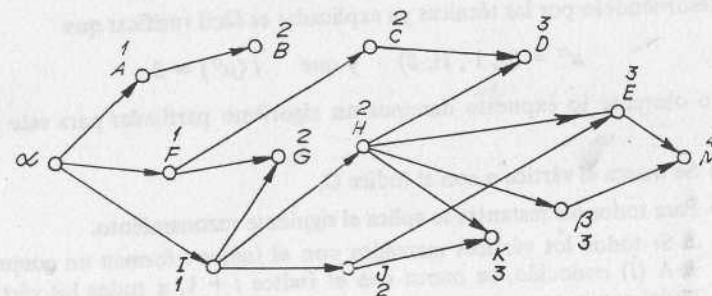
como era de esperar.

Luego, el camino  $\mu = (\alpha, I, H, \beta)$  es el camino óptimo, o sea  $\mu^0$ , y  $l(\mu^0) = 3$ .

#### Aclaración

Sugerimos trabajar la segunda parte del algoritmo, identificando el grafe parcial formado por todos los arcos para los cuales la diferencia de índices sea igual a uno.

Si así lo hacemos, encontraremos



No sólo podemos ver claramente el camino de longitud mínima entre  $\alpha$  y  $\beta$ , sino entre  $\alpha$  y todos los demás.

Así por ejemplo, entre  $\alpha$  y E, vemos que existe

$$\mu^0 = \{\alpha, I, H, E\} \quad l(\mu^0) = 3$$

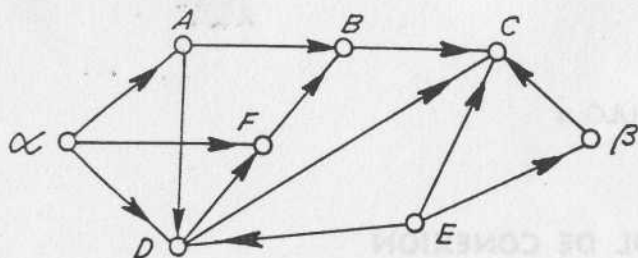
$$\mu^0 = \{\alpha, I, J, E\} \quad l(\mu^0) = 3$$

es decir que con esta forma de trabajar la segunda parte, el algoritmo nos permite identificar la existencia de uno o varios caminos de longitud mínima entre dos vértices cualesquiera de un grafo. Se ve también cuando no existe ningún camino.

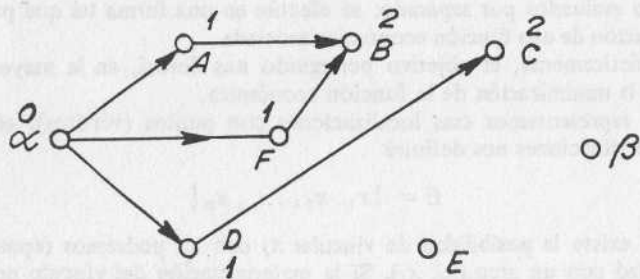
En el caso que no pudiéramos alcanzar a marcar el vértice  $\beta$ , el proceso nos indicaría que no existe camino entre  $\alpha$  y  $\beta$  y el subgrafe parcial nos indicaría los caminos de longitud mínima entre  $\alpha$  y los vértices accesibles.

## Ejercicio

Proponemos el grafo siguiente

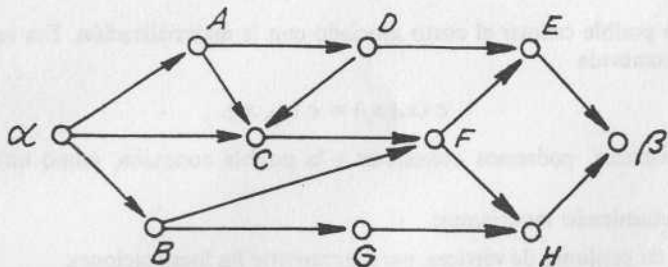


Fácilmente se obtendrá como solución



Camino de longitud máxima

Sea el siguiente grafo



Supongamos que los vértices representan puestos de control, y que deseamos encontrar la ruta entre  $\alpha$  y  $\beta$ , que posea el mayor número de tales puestos.

Se tratará entonces, de encontrar el camino que tenga el mayor número de arcos, o sea, el de longitud máxima.

Es decir, debemos hallar  $\mu_{\alpha\beta}$  tal que  $F^0(\mu_{\alpha\beta}) = \max l(\mu_{\alpha\beta})$

Podemos aplicar el algoritmo descrito para el proceso de minimización, previa modificación del paso 2. Este quedará:

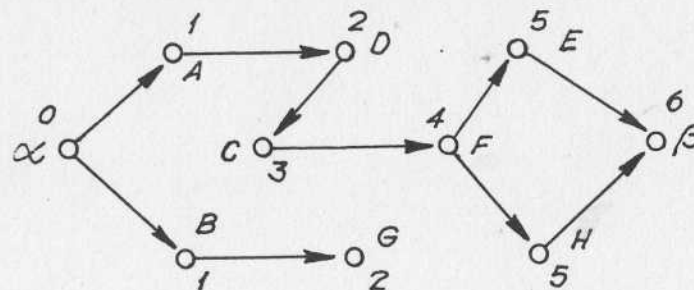
... se marca con el índice  $i + 1$  a todos los vértices del conjunto

$$A(i+1) = \{x/x \in \Gamma A(i); x \notin A(k) \forall k \geq i+1\}$$

o sea, a los vértices que sean destino de arcos que se inician en puntos de  $A(i)$ , pero que no están marcados ya con índices superiores o iguales a  $i + 1$ .

## Ejercicio

Verifique el lector, si la solución del ejemplo propuesto es



Si la solución es correcta, podrá observar que existen dos caminos de longitud máxima entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

## CAPITULO 4

### ARBOL DE CONEXION

Hay casos donde el problema consiste en lograr la interconexión entre localizaciones de modo que la materialización de los vínculos necesarios, que han sido evaluados por separado, se efectúe en una forma tal que produzca la optimización de una función económica asociada.

Prácticamente, el objetivo perseguido nos llevará, en la mayoría de los casos, a la minimización de la función económica.

Si representamos esas localizaciones con puntos (vértices), el conjunto finito de situaciones nos definirá

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

Si existe la posibilidad de vincular  $x_i$  con  $x_j$ , podremos representar esa posibilidad con un arco  $(x_i, x_j)$ . Si la materialización del vínculo nos permite la conexión en forma bidireccional, podemos decir que existe también el arco  $(x_j, x_i)$ . O sea, que

$$(x_i, x_j) \iff (x_j, x_i)$$

Es posible estimar el costo asociado con la materialización. Esa valuación será denominada

$$c(x_i, x_j) = c(x_j, x_i).$$

Entonces, podremos considerar a la posible conexión, como una arista,  $(x_i, x_j)$ .

Resumiendo tendríamos:

- un conjunto de vértices, para representar las localizaciones,
- un conjunto de aristas, para representar las conexiones.

o sea, podríamos usar a un grafo no orientado como modelo de la situación real examinada.

Así por ejemplo, si quisiéramos vincular una serie de destilerías por medio de oleoductos, los vértices representarían las destilerías, y las tuberías, los vínculos materiales de conexión. Supongamos que nuestro objetivo es lograr vincularlas a todas haciendo uso de la menor longitud posible de tuberías.

Podemos asociar a cada arista, un "costo" dado por la longitud de tubos necesaria para concretarla.

La necesidad de minimizar la longitud total nos lleva a considerar como incompatible la presencia de cualquier ciclo. En efecto, la supresión de una de las aristas no significa que los vértices incluidos en el ciclo queden desconectados, pero habremos reducido la longitud en cuestión. Estas consideraciones nos indican que es condición necesaria para la solución, que ésta tome la forma de Arbol.

Pero los varios árboles parciales de un grafe no orientado que podemos obtener (véase pág. 32), nos darán diferentes valores de la función económica, que definimos como

$$F(Ar) = \sum_{\bar{u} \in Ar} c(\bar{u})$$

Como nos interesa la "longitud total mínima", tendremos que hallar, el Arbol Mínimo de Conexión.

Al mismo problema arribaríamos si consideramos las situaciones siguientes:

- Hallar la longitud mínima de cables conductores para vincular un conjunto de  $n$  ciudades dadas.
- Determinar las líneas aéreas necesarias para vincular  $n$  aeropuertos, de modo de minimizar el costo total.
- Minimizar la longitud de tuberías para llevar aire comprimido desde un compresor a  $n$  máquinas neumáticas.

Es interesante citar aquí el problema comentado por Claude Flament (pág. 90, [F. 1]), sobre las posibilidades de comunicación entre las  $n$  personas integrantes de un grupo social, y que trataremos de sintetizar.

Admitiendo que la información que posee uno de los integrantes deba ser difundida en el grupo entero, que la comunicación entre  $x_i$  y  $x_j$  es posible, definimos el canal de información  $(x_i, x_j)$ ; si es posible la comunicación  $(x_j, x_i)$  y ambos canales recíprocos tienen la misma valuación, podemos representarlos por una arista  $(x_i, x_j)$  que tendrá asociada el valor  $c(x_i, x_j)$ .

Sintetizando: Sea  $\Gamma$  la correspondencia que nos traduce las posibilidades de comunicación entre los miembros del grupo

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}.$$

De acuerdo con lo enunciado, se tendrá

$$(x_i, x_j) \in \Gamma \iff (x_j, x_i) \in \Gamma$$

$$y \quad c(x_i, x_j) = c(x_j, x_i)$$

Estas dos condiciones nos permitirán considerar al grafe simétrico resultante, como un grafe no orientado

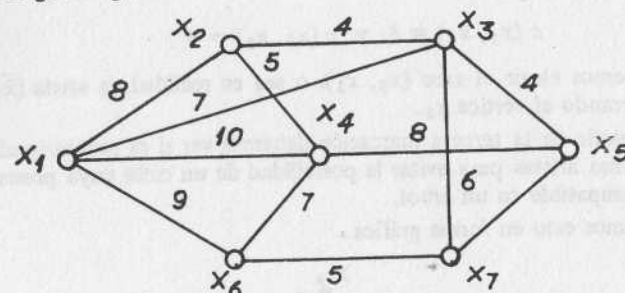
$$\bar{G} = (E, \bar{U})$$

Si las valuaciones representan el costo necesario para usar el canal de

comunicación, nuestro objetivo podrá ser encontrar el arbol mínimo de intercomunicación.

### Arbol mínimo de conexión

Sea el grafe siguiente



donde las aristas indican los vínculos que podemos materializar afrontando los correspondientes costos  $c(x_i, x_j)$ .

Nuestro problema es encontrar un arbol  $A_r$  para el cual

$$F(A_r) = \sum_{u \in A_r} c(\bar{u}) \text{ sea mínima}$$

**Solución:** Hagamos una tabla donde cada columna nos indique todos los arcos que nacen en el vértice que identifica la columna. Para simplificar la escritura sólo pondremos el vértice destino de cada arco. Por comodidad los ordenaremos por valores crecientes de  $c(u)$

| +        | +       | +       |          |         |         |         |
|----------|---------|---------|----------|---------|---------|---------|
| $x_1$    | $x_2$   | $x_3$   | $x_4$    | $x_5$   | $x_6$   | $x_7$   |
| $x_3$ 7  | $x_3$ 4 | $x_2$ 4 | $x_2$ 5  | $x_7$ 2 | $x_7$ 5 | $x_5$ 2 |
| $x_2$ 8  | $x_4$ 5 | $x_5$ 4 | $x_6$ 7  | $x_3$ 4 | $x_4$ 7 | $x_6$ 5 |
| $x_6$ 9  | $x_1$ 8 | $x_7$ 6 | $x_5$ 8  | $x_4$ 8 | $x_1$ 9 | $x_3$ 6 |
| $x_4$ 10 |         | $x_1$ 7 | $x_1$ 10 |         |         |         |

- 1) Se elige un vértice en forma arbitraria. (Sea por ejemplo  $x_1$ ). Le colocamos una marca +.
- 2) Seleccionamos el arco  $(x_1, x_3)$  dado que  $c(x_1, x_3) = 7$  es el menor valor, es decir,  $\min c(x_i, x_j)$ . Marcamos el vértice  $x_3$  y seleccionamos también el arco  $(x_3, x_2)$  puesto que en realidad hemos seleccionado la arista  $(x_1, x_3)$ , es decir, la "conexión" entre  $x_1$  y  $x_3$ .

3) La nueva arista a seleccionar la encontramos ubicando el

$$\min_j \{c(x_1, x_j), c(x_3, x_j)\},$$

o sea el mínimo valor de  $c(u)$  considerando solamente los vértices marcados.

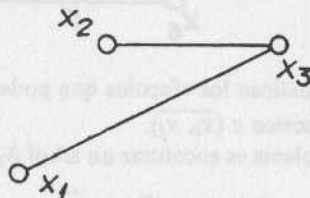
Así puesto que

$$c(x_1, x_2) = 8 \text{ y } c(x_3, x_2) = 4$$

debemos elegir el arco  $(x_3, x_2)$ , o sea en realidad, la arista  $(\overline{x_3, x_2})$ , marcando el vértice  $x_2$ .

A partir de la tercera marcación debemos ver si es necesario eliminar algunas aristas para evitar la posibilidad de un ciclo cuya presencia es incompatible en un árbol.

Veamos esto en forma gráfica



La consideración de la arista  $(\overline{x_1, x_2})$  es incompatible. Luego eliminamos (tachamos) los arcos  $(x_1, x_2)$  y  $(x_2, x_1)$ .

Para no hacer la representación gráfica, al alcanzar el tercer vértice, verificamos si todos los arcos que este último define con cada uno de los anteriores ha sido:

a) seleccionado

o b) eliminado

Así al marcar  $x_2$  (3ª marcación), verificamos si existe  $(x_2, x_1)$  y  $(x_2, x_3)$  pues  $x_1$  y  $x_3$  ya estaban marcados. Vemos que  $(x_2, x_3)$  ha sido seleccionado, y que  $(x_2, x_1)$  debe ser eliminado.

Repitamos la tabla con las modificaciones sufridas hasta este tercer paso.

| +                               | +                               | +                               |            | +                               |           |           |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|------------|---------------------------------|-----------|-----------|
| $x_1$                           | $x_2$                           | $x_3$                           | $x_4$      | $x_5$                           | $x_6$     | $x_7$     |
| $x_3 - 7$                       | $x_3 - 4$                       | $x_2 - 4$                       | $x_2 - 5$  | $x_7 - 2$                       | $x_7 - 5$ | $x_5 - 2$ |
| <del><math>x_2 - 8</math></del> | $x_4 - 5$                       | <del><math>x_5 - 4</math></del> | $x_6 - 7$  | <del><math>x_3 - 4</math></del> | $x_4 - 7$ | $x_6 - 5$ |
| $x_6 - 9$                       | <del><math>x_1 - 8</math></del> | $x_7 - 6$                       | $x_5 - 8$  | $x_4 - 8$                       | $x_1 - 9$ | $x_3 - 6$ |
| $x_4 - 10$                      |                                 | $x_1 - 7$                       | $x_1 - 10$ |                                 |           |           |

4) Considerando los vértices marcados, compararemos

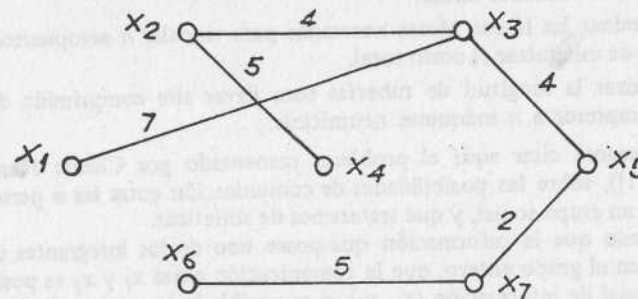
$$c(x_1, x_6) = 9 \quad c(x_2, x_4) = 5 \quad c(x_3, x_5) = 4$$

Ello nos indica seleccionar  $(\overline{x_3, x_5})$  marcando  $x_5$ . En este paso no hay aristas a eliminar.

5) Reiterando el proceso, se llegará fácilmente a la tabla final siguiente

| +                                | +         | +                               | +                                | +                               | +                               | +                               |
|----------------------------------|-----------|---------------------------------|----------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| $x_1$                            | $x_2$     | $x_3$                           | $x_4$                            | $x_5$                           | $x_6$                           | $x_7$                           |
| $x_3 - 7$                        | $x_3 - 4$ | $x_2 - 4$                       | $x_2 - 5$                        | $x_7 - 2$                       | $x_7 - 5$                       | $x_5 - 2$                       |
| <del><math>x_2 - 8</math></del>  | $x_4 - 5$ | $x_5 - 4$                       | <del><math>x_6 - 7</math></del>  | $x_3 - 4$                       | <del><math>x_4 - 7</math></del> | $x_6 - 5$                       |
| <del><math>x_6 - 9</math></del>  | $x_1 - 8$ | <del><math>x_7 - 6</math></del> | <del><math>x_5 - 8</math></del>  | <del><math>x_4 - 8</math></del> | <del><math>x_1 - 9</math></del> | <del><math>x_3 - 6</math></del> |
| <del><math>x_4 - 10</math></del> |           | $x_1 - 7$                       | <del><math>x_1 - 10</math></del> |                                 |                                 |                                 |

o sea el árbol mínimo es



$$\text{y } F(A_r^0) = 27$$

### Ejercicio

Sugerimos al lector comenzar por otro vértice, en lugar de  $x_1$ , y comprobar que obtendrá el mismo resultado.

### Solución por medio del algoritmo de Kruskal

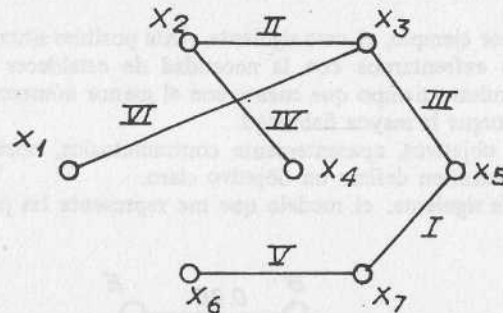
El algoritmo es el siguiente:

- 1) Se elige la arista cuyo  $c(i, j)$  sea mínimo.
- 2) La siguiente en orden creciente.
- 3) Se repite el segundo paso eligiendo entre todas las aristas que no forman todavía parte del árbol siempre que no forme un ciclo con las aristas ya seleccionadas.

Construyamos la matriz asociada trabajando con el sector superior (el situado por encima de la diagonal principal).

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$           | $x_4$           | $x_5$            | $x_6$    | $x_7$          |
|-------|-------|-------|-----------------|-----------------|------------------|----------|----------------|
| $x_1$ |       | 8     | 7 <sup>VI</sup> | 10              | $\infty$         | 9        | $\infty$       |
| $x_2$ |       |       | 4 <sup>II</sup> | 5 <sup>IV</sup> | $\infty$         | $\infty$ | $\infty$       |
| $x_3$ |       |       |                 | $\infty$        | 4 <sup>III</sup> | $\infty$ | 6              |
| $x_4$ |       |       |                 |                 | 8                | 7        | $\infty$       |
| $x_5$ |       |       |                 |                 |                  | $\infty$ | 2 <sup>I</sup> |
| $x_6$ |       |       |                 |                 |                  |          | 5 <sup>V</sup> |

- 1) Como  $\min_{\bar{u}} c(\bar{u}) = 2$  seleccionamos  $(x_5, x_7)$  I
- 2) El siguiente  $c(\bar{u}) = 4$  tenemos dos aristas. Seleccionamos primariamente una de ellas en forma arbitraria: sea  $(x_2, x_3)$  II  
Luego  $(x_3, x_5)$  III pues no forma ciclo con las aristas ya seleccionadas.



- 3) El siguiente valor es  $c(\bar{u}) = 5$ . Seleccionamos  $(x_2, x_4)$  IV y luego  $(x_6, x_7)$  pues no forma ciclo con las anteriores. V
- 4)  $c(\bar{u}) = 6$   
No podemos elegir  $(x_3, x_7)$  pues formaríamos un ciclo.
- 5)  $c(\bar{u}) = 7$   
Elijo  $(x_1, x_3)$  pues no forma ciclo. VI  
La  $(x_4, x_6)$  no puede elegirse pues formaría un ciclo.

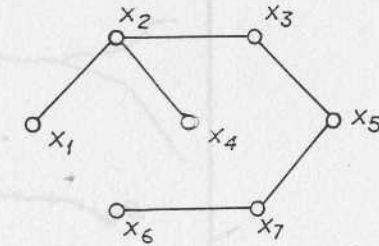
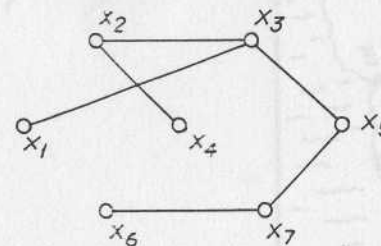
El proceso terminó pues hemos vinculado todos los vértices.  
Este algoritmo es más cómodo y con él es más difícil cometer errores de cálculo.

## Ejercicio I

Pedimos al lector que verifique si es exacto que si en el ejemplo antes propuesto, hubiéramos tenido

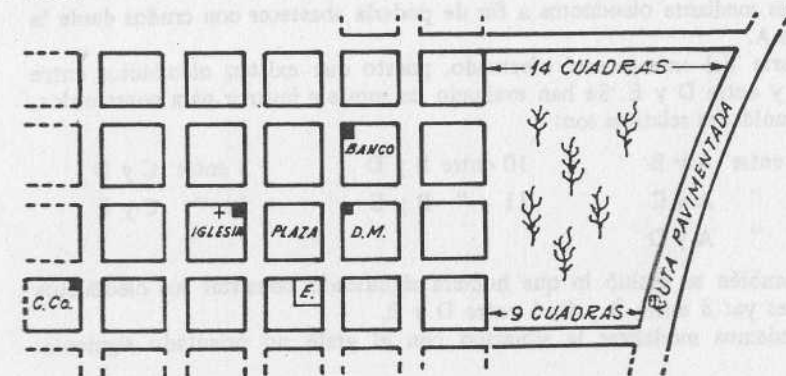
$$c(\overline{x_1, x_2}) = 5 \quad \text{y} \quad c(\overline{x_1, x_3}) = 5$$

encontraríamos, aplicando cualquiera de las técnicas descritas, dos árboles óptimos:



## Ejercicio II

Las autoridades municipales desean establecer un plan mínimo de pavimentos para una localidad balnearia que tiene actualmente todas sus calles de tierra.



En el croquis se indican los edificios principales que se quieren vincular: Banco, Iglesia, Delegación Municipal, Centro Comercial y Escuela.

La localidad posee sólo dos rutas de acceso, también de tierra, desde la Ruta Nacional pavimentada. El plan debe contemplar el número de cuadras a pavimentar necesario para vincular los cinco puntos principales con la Ruta Nacional. Considerando los costos de las obras proporcional a la longitud a pavimentar, dichas autoridades desean minimizar el costo total.

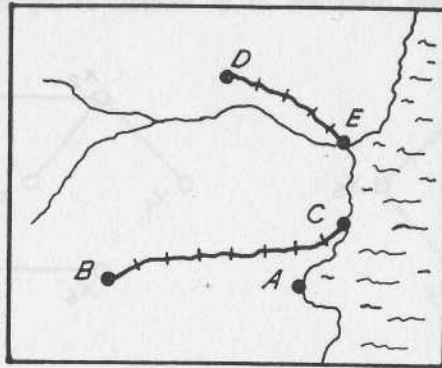
$$R = 18 \text{ cuadras.}$$

- b) Si la plaza estuviese ya rodeada por calles asfaltadas, el resultado

sería 15. El lector puede rápidamente verificarlo. (Considere las aristas que representan una calle asfaltada como asociadas a un valor  $c(u) = 0$ ).

### Ejercicio III

Estudiando un croquis de cierta zona, se observa la existencia de cinco refinерías de petróleo.



Tres de ellas A, C, E están situadas sobre la costa.

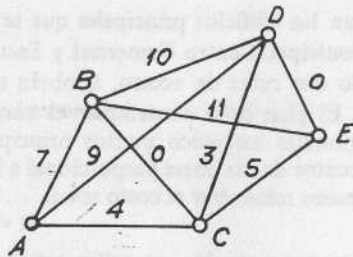
Dada la mayor facilidad operativa del puerto A, se desea vincular a las refinерías mediante oleoductos a fin de poderla abastecer con crudos desde la posición A.

Parte del trabajo está efectuado, puesto que existen oleoductos entre B y C, y entre D y E. Se han evaluado las sumas a invertir para construirlos, que en unidades relativas son:

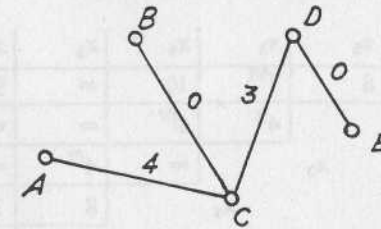
|               |                |               |
|---------------|----------------|---------------|
| 7 entre A y B | 10 entre B y D | 3 entre C y D |
| 4 " A y C     | 11 " B y E     | 5 " C y E     |
| 9 " A y D     |                |               |

También se evaluó lo que hubiera significado construir los oleoductos existentes ya: 8 entre B y C; 6 entre D y E.

Podemos modelizar la situación con el grafe no orientado siguiente:



La solución es inmediata.



siendo  $F^0 = 7$  o sea, 21 considerando los 14 ya invertidos antes.

Si las autoridades competentes hubieran podido estudiar el problema cuando aun no se había concretado la materialización de ninguno de los vínculos, habían obtenido (a valores constantes) como óptimo

$$\bar{U}_{Ar} = \{(\overline{A, C}); (\overline{A, B}); (\overline{C, D}); (\overline{C, E})\}$$

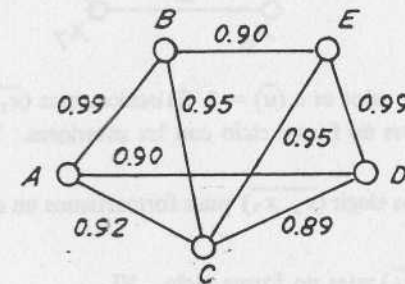
con una  $F^0$  de 19. Pedimos al lector que lo verifique.

### Arbol máximo de conexión

Veamos, por ejemplo, el caso siguiente. Ante posibles situaciones de emergencia podemos enfrentarnos con la necesidad de establecer un sistema de vínculos que al mismo tiempo que cuente con el menor número de conexiones parciales, nos otorgue la mayor fiabilidad.

Estos dos objetivos, aparentemente contradictorios, obrando como restricciones, nos permiten definir un objetivo claro.

Sea el grafe siguiente, el modelo que me representa las posiciones a vincular.



Las aristas me representan las conexiones parciales posibles. Los valores asociados a las aristas, el grado de confianza o probabilidad de buen funcionamiento del par de conexión.

Alcanzar el objetivo de lograr un sistema de intercomunicación con el menor número de pares de conexiones, nos llevará a la búsqueda de un arbol de conexión.

Pero ese sistema (árbol) operará siempre que todas sus conexiones paralelas operen satisfactoriamente. Es decir, la falla de cualquiera de sus "ramas" significará la falla del sistema. En consecuencia, el sistema buscado está estructurado por elementos en serie.\*

Por lo tanto

$$F_s = \prod_{i=1}^k F_i$$

donde

$F_s$  es la fiabilidad del sistema

$F_i$  la fiabilidad de cada componente.

$k=n-1$  siendo  $n$  el número de posiciones a vincular.

Nuestro objetivo será lograr  $F_s$  máx.

Si tomamos logaritmos

$$\log F_s = \log \left( \prod_{i=1}^k F_i \right) = \sum_{i=1}^k \log F_i$$

Nuestro objetivo podrá representarse

$$\text{máx} \sum_{i=1}^k \log F_i$$

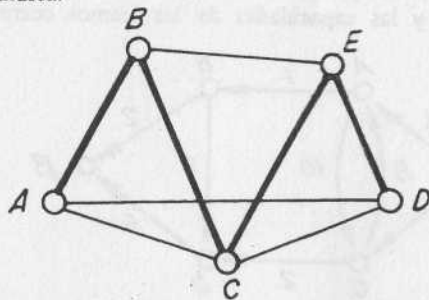
Por lo tanto si asociamos a cada arista el log. de la fiabilidad, podemos considerar, por analogía, que buscamos el árbol máximo de conexión.

Sin embargo, podemos prescindir, para encontrarlo, del cálculo logarítmico.

En efecto: Dado que  $0 < F_i < 1 \forall i$

$$\text{es } \prod_{i=1}^k F_i < \min_{i \in S} F_i$$

Luego, podemos ir construyendo la solución tomando las aristas cuya fiabilidad sea mayor y que no forme ciclo con las aristas ya seleccionadas. Dejaremos al lector que lo aplique y verifique si la solución óptima es la que continuación se indica.



con  $F^o = 0,884$

Pudimos haber procedido en forma dual, o sea, "eliminando" paso a paso las aristas de menor fiabilidad, cuidando que el grafo permaneciera siempre conexo.

Este procedimiento es general. Vea el lector como aplicarlo a los ejercicios de árbol mínimo. (Deberá "eliminar", paso a paso, las aristas de mayor valor asociado.)

\* Para mayor información remitimos al lector al libro "Nociones de fiabilidad", de esta misma colección.

## CAPITULO 5

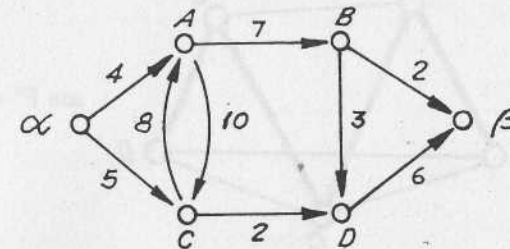
### FLUJO A TRAVES DE UNA RED DE TRANSPORTE

Habíamos definido ya (pág. 32) a la red de transporte como un grafo conexo, sin bucles, que poseía uno y sólo un vértice que no era destino de ningún arco, y otro y sólo otro que no era origen de ningún arco. Al primero lo denominamos "entrada" (o fuente) y al segundo, "salida" (o sumidero). También dijimos que por cada arco era posible hacer circular un flujo que estaba limitado por las condiciones propias del vínculo, es decir, por la capacidad del arco.

Un examen macroscópico de la situación se podría esquematizar de la manera siguiente.



Siempre que la red tenga una capacidad adecuada, el flujo entrante podrá ser transferido como flujo de salida. Muchas veces nos interesará saber hasta qué valor de flujo generado es posible transferir mediante una red existente. Para ello tendremos que recurrir al análisis de la red de transporte, a visualizar como se vinculan las diferentes posiciones de concentración y distribución de los transportes parciales y las capacidades de los tramos correspondientes.



Supongamos que con  $\alpha$  representamos a un yacimiento de carbón, y con  $\beta$  a la usina que lo utiliza como combustible. La producción mensual del yaci-

amiento es de 9 unidades (relativas) y el consumo correspondiente, en la usina, es de 8; es decir que en principio se podría satisfacer las necesidades de la usina. Sin embargo, dada la configuración de la red de transporte, esto no será factible.

Después se verán las técnicas que permitirán comprobarlo. Además, el lector podrá verificar entonces que la cantidad máxima de carbón transportable desde el yacimiento hacia la usina, es de 7 unidades.

El problema que nos ocupa es determinar la cantidad de materia que se debe hacer pasar por cada arco, de modo que la cantidad total que se desplaza a través de la red, desde la fuente hasta el sumidero sea máxima.

Antes de emprender su solución definamos algunas nociones que necesitaremos.

#### Capacidad del arco $c(u)$

A cada arco  $u$  asociaremos una capacidad  $c(u)$  que nos dice cual es la máxima cantidad que por él puede pasar.

#### Flujo a través de un arco: $\varphi(u)$

Es una variable, que nos indicará la cantidad de materia que atraviesa el arco. Es evidente que debe cumplir la condición de no negatividad, y teniendo en cuenta la capacidad del arco  $c(u)$ , podemos escribir simbólicamente.

$$0 \leq \varphi(u) \leq c(u) \quad \forall u \in U$$

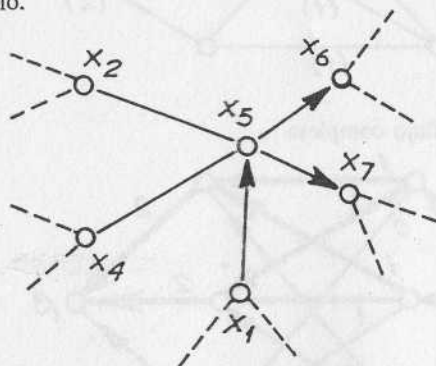
#### Subconjuntos de arcos asociados a cada vértice

Para cada vértice distinguiremos dos subconjuntos de arcos:

$U_x^-$  formado por los arcos que a él llegan (que lo tienen como destino común) y

$U_x^+$  constituido por los arcos que de él salen (que lo tienen como origen).

Si por ejemplo.



(En el dibujo se indica claramente cuando el arco es orientado)

$$U_{x_5}^- = \{(x_1, x_5); (x_2, x_5); (x_4, x_5)\}$$

$$U_{x_5}^+ = \{(x_5, x_2); (x_5, x_4); (x_5, x_6); (x_5, x_7)\}$$

Es evidente que para la "entrada"  $U_\alpha^- = \phi$

Análogamente, para el sumidero  $U_\beta^+ = \phi$

#### Conservación del flujo

En todo vértice, con excepción de la fuente y el sumidero, no se crea ni se destruye materia, y tampoco puede haber "stock" (almacenamiento). Es decir, el flujo que llega a un vértice es exactamente igual al flujo que de él sale.

Simbólicamente

$$\sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) = \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) \quad \forall x/x \neq \alpha; x \neq \beta$$

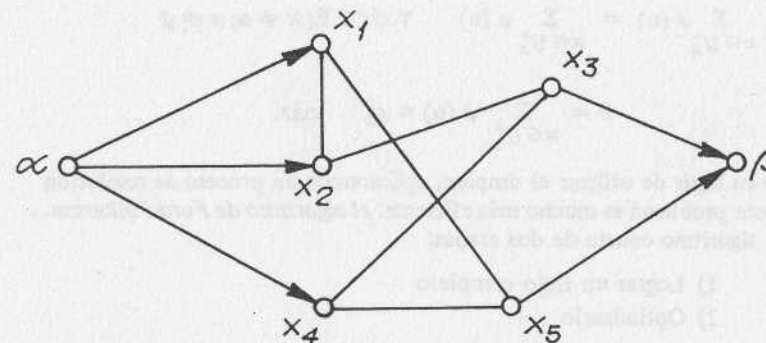
#### Flujo total: F

Denominamos así al flujo generado en la fuente  $\alpha$  y que luego de atravesar la red, es absorbido en el sumidero  $\beta$ .

Luego

$$F = \sum_{u \in U_\alpha^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_\beta^-} \varphi(u)$$

Que el flujo generado en la fuente es igual al absorbido por el sumidero es consecuencia de la conservación del flujo. En el siguiente ejemplo sencillo podemos hacer una comprobación.



Aplicando el principio de la conservación del flujo

$$\varphi(\alpha, x_1) + \varphi(x_2, x_1) + \varphi(x_5, x_1) = \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_1, x_5)$$

$$\varphi(\alpha, x_2) + \varphi(x_1, x_2) + \varphi(x_3, x_2) = \varphi(x_2, x_1) + \varphi(x_2, x_3)$$

$$\varphi(x_1, x_3) + \varphi(x_4, x_3) = \varphi(x_3, x_2) + \varphi(x_3, x_4) + \varphi(x_5, \beta)$$

$$\varphi(\alpha, x_4) + \varphi(x_3, x_4) + \varphi(x_5, x_4) = \varphi(x_4, x_3) + \varphi(x_4, x_5)$$

$$\varphi(x_1, x_5) + \varphi(x_4, x_5) = \varphi(x_5, x_4) + \varphi(x_5, x_1) + \varphi(x_5, \beta)$$

S.m.a.m. y simplificando los términos iguales que figuran en ambos miembros, se obtiene

$$\varphi(\alpha, x_1) + \varphi(\alpha, x_2) + \varphi(\alpha, x_4) = \varphi(x_3, \beta) + \varphi(x_5, \beta)$$

o sea

$$\sum_{u \in U_\alpha^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_\beta^-} \varphi(u)$$

Simplificando la notación

$$\varphi_\alpha = \varphi_\beta$$

**Objetivo:**  $F^0$

Si recordamos que cada arco  $u$  tiene asociada una capacidad  $c(u)$  que es la máxima cantidad de materia que lo puede atravesar, el flujo máximo  $F^0$  que busquemos deberá ser compatible con las capacidades de los diferentes arcos que forman la red. Es un problema que podría resolverse por las técnicas de la programación lineal: encontrar un conjunto de valores

$$\varphi(u) \geq 0$$

que cumpliendo con

$$\varphi(u) \leq c(u) \quad \forall u \in U$$

y con

$$\sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = \sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) \quad \forall x/x \in E; x \neq \alpha; x \neq \beta$$

hagan

$$F = \sum_{u \in U_\alpha^+} \varphi(u) = \varphi_\alpha \quad \text{máx.}$$

Pero en lugar de utilizar el simplex, aplicaremos un proceso de resolución que para este problema es mucho más eficiente: *el algoritmo de Ford-Fulkerson*.

Este algoritmo consta de dos etapas:

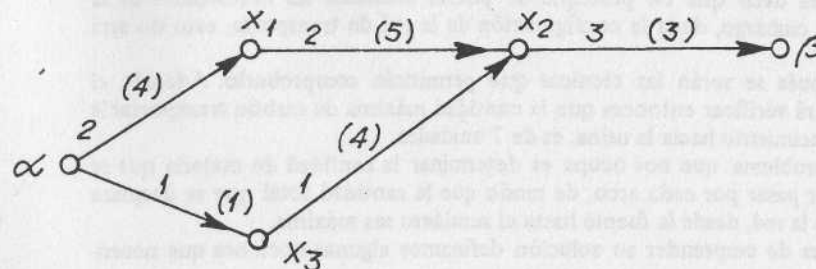
- 1) Lograr un flujo completo
- 2) Optimizarlo

Antes de entrar en su descripción, veamos algunas nociones que necesitaremos.

**Arco saturado:** Se dice que un arco  $u$  es saturado cuando el flujo que lo atraviesa es exactamente igual a su capacidad, o sea, cuando  $\varphi(u) = c(u)$ .

**Flujo completo:** Se dice que un flujo  $F$  es completo cuando todo camino que va desde  $\alpha$  hasta  $\beta$  contiene como mínimo un arco saturado.

Así para el ejemplo



$F = 3$  es completo pues existen dos caminos entre  $\alpha$  y  $\beta$ , que contienen un arco saturado como mínimo.

En efecto

$$\mu_1 = (\alpha, x_1, x_2, \beta) \quad \text{con} \quad \varphi(x_2, \beta) = c(x_2, \beta) = 3$$

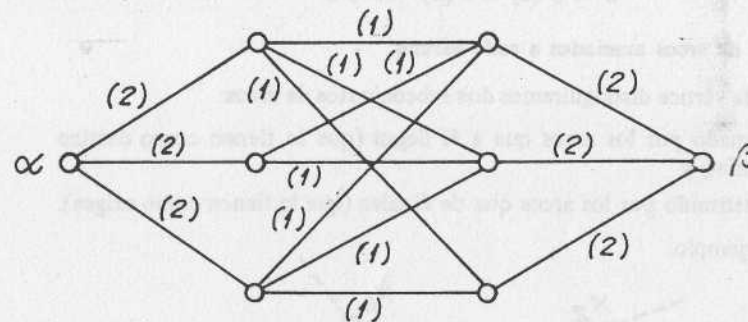
$$\text{y } \mu_2 = (\alpha, x_3, x_2, \beta) \quad \text{con} \quad \varphi(\alpha, x_3) = c(\alpha, x_3) = 1$$

$$\text{y } \varphi(x_2, \beta) = c(x_2, \beta) = 3$$

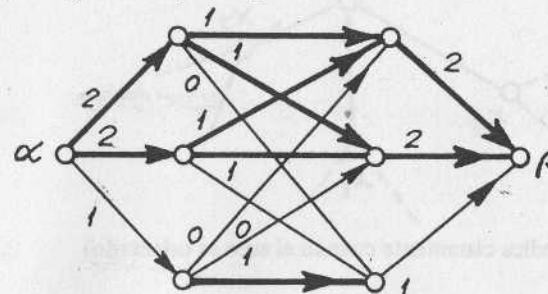
(entre paréntesis hemos indicado las capacidades de cada arco).

Un flujo puede ser completo, pero no óptimo.

Así, en la red

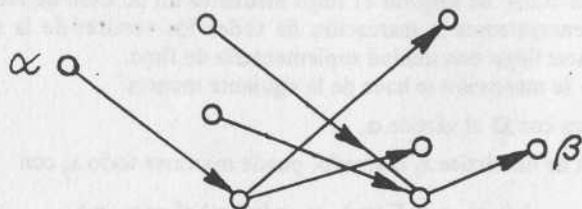


puedo obtener el siguiente flujo completo



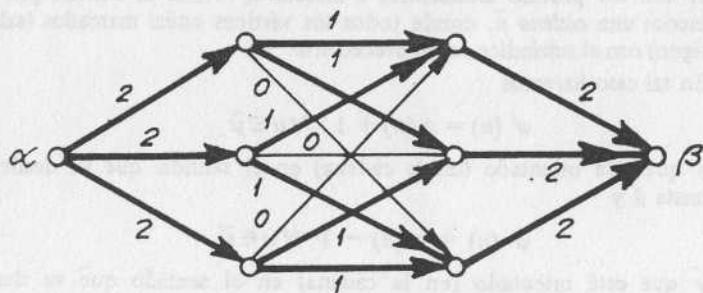
Para mayor claridad, y dado que todas las capacidades son unitarias, sólo colocamos el flujo asignado a cada arco y reforzamos los trazos de los arcos saturados.

En efecto, el grafe parcial de arcos no saturados será:



que nos dice que no hay camino de arcos no saturados entre  $\alpha$  y  $\beta$ .

En cambio, el flujo completo que además es óptimo, es el siguiente:



De allí la existencia de las dos etapas que describiremos.

### 1) Lograr un flujo completo

- Sea  $F$  un flujo inicial.
- Si no es completo, en el grafo parcial de arcos no saturados, podremos determinar como mínimo un camino  $\mu$  donde todos sus arcos no son saturados.

— Hacemos

$$\varphi'(u) = \varphi(u) + 1 \quad \forall u \in \mu$$

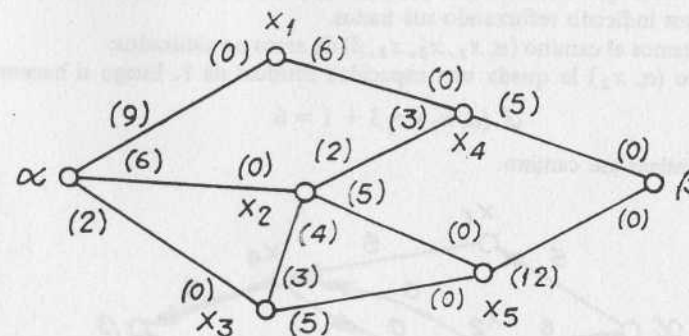
$$\text{y} \quad \varphi'(u) = \varphi(u) \quad \forall u \notin \mu$$

el flujo total es ahora  $F' = F + 1$ .

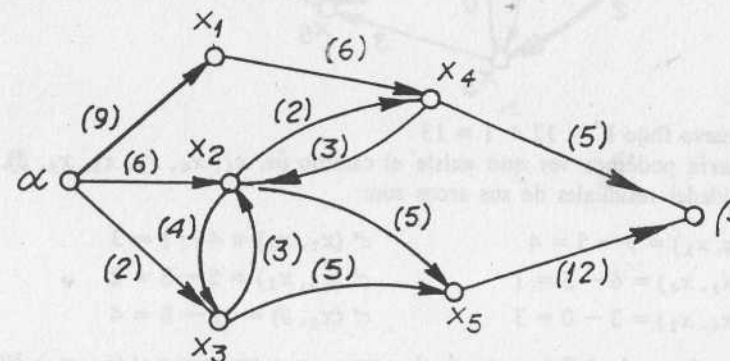
— Reiteramos el procedimiento hasta que  $F$  sea completo.

*Nota:* Para acelerar el procedimiento es conveniente proceder así: Detectado el camino  $\mu$ , calculamos la capacidad remanente de cada arco que lo constituye y elevamos el flujo en una cantidad igual a la capacidad residual mínima.

Sea



que es la representación simplificada de



Demos a

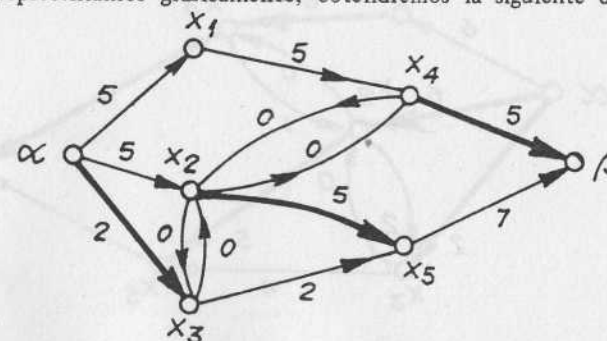
$$\varphi(\alpha, x_1) = 5$$

$$\varphi(\alpha, x_2) = 5$$

$$\varphi(\alpha, x_3) = 2$$

o sea un flujo inicial  $F = 12$ .

Si representamos gráficamente, obtendremos la siguiente distribución:



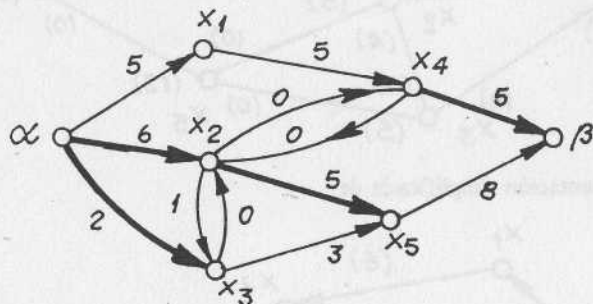
Puede verse que los arcos  $(\alpha, x_3)$ ;  $(x_2, x_5)$  y  $(x_4, \beta)$  alcanzan la saturación. Esto lo hemos indicado reforzando sus trazos.

Detectamos el camino  $(\alpha, x_2, x_3, x_5, \beta)$  de arcos no saturados.

Al arco  $(\alpha, x_2)$  le queda una capacidad residual de 1. Luego si hacemos

$$\varphi'(\alpha, x_2) = 5 + 1 = 6$$

podemos eliminar ese camino.



El nuevo flujo  $F' = 12 + 1 = 13$

Todavía podemos ver que existe el camino  $(\alpha, x_1, x_4, x_2, x_3, x_5, \beta)$ . Las capacidades residuales de sus arcos son:

$$c'(\alpha, x_1) = 9 - 5 = 4$$

$$c'(x_2, x_3) = 4 - 1 = 3$$

$$c'(x_1, x_4) = 6 - 5 = 1$$

$$c'(x_3, x_5) = 5 - 3 = 2$$

$$c'(x_4, x_2) = 3 - 0 = 3$$

$$c'(x_5, \beta) = 12 - 8 = 4$$

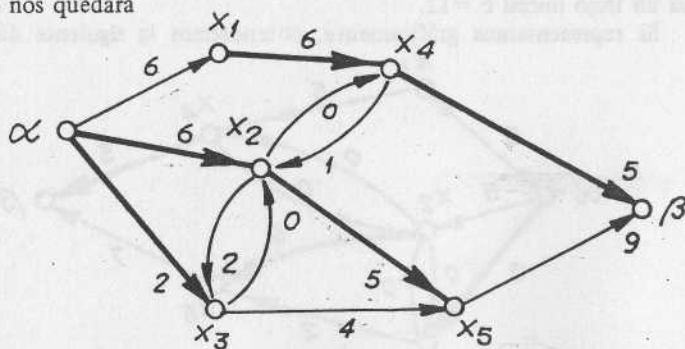
luego elevando en 1 el flujo a través de esos arcos saturaremos al  $(x_1, x_4)$ . El nuevo flujo  $F = 13 + 1 = 14$ .

Luego

$$\varphi'(\alpha, x_1) = 6; \varphi'(x_1, x_4) = 6; \varphi'(x_4, x_2) = 1;$$

$$\varphi'(x_2, x_3) = 2; \varphi'(x_3, x_5) = 4 \text{ y } \varphi'(x_5, \beta) = 9$$

La figura nos quedará



Es fácil ver que ya no existe ningún camino de arcos no saturados entre  $\alpha$  y  $\beta$ . Hemos logrado un flujo completo.

## 2) Optimizarlo

Consiste en tratar de mejorar el flujo mediante un proceso de redistribución. Para ello ensayaremos la marcación de todos los vértices de la red a la cual se podría hacer llegar una unidad suplementaria de flujo.

El proceso de marcación se hace de la siguiente manera:

a) Se marca con O al vértice  $\alpha$ .

b) A partir de un vértice  $x_i$  marcado, puede marcarse todo  $x_j$  con

$$+i \text{ si } x_j \in \Gamma(x_i) \text{ y } \varphi(x_i, x_j) < c(x_i, x_j)$$

$$\text{y con } -i \text{ si } x_j \in \Gamma^{-1}(x_i) \text{ y } \varphi(x_j, x_i) > 0$$

c) Si con ese proceso alcanzamos a marcar el vértice  $\beta$ , existirá por lo menos una *cadena*  $\bar{\mu}$ , donde todos los vértices estén marcados (salvo signo) con el subíndice de un precedente.

En tal caso haremos

$$\varphi'(u) = \varphi(u) + 1 \quad \forall u \in \bar{\mu}$$

y que esté orientado (en la cadena) en el sentido que va desde  $\alpha$  hasta  $\beta$  y

$$\varphi'(u) = \varphi(u) - 1 \quad \forall u \in \bar{\mu}$$

y que esté orientado (en la cadena) en el sentido que va desde  $\beta$  hasta  $\alpha$  y

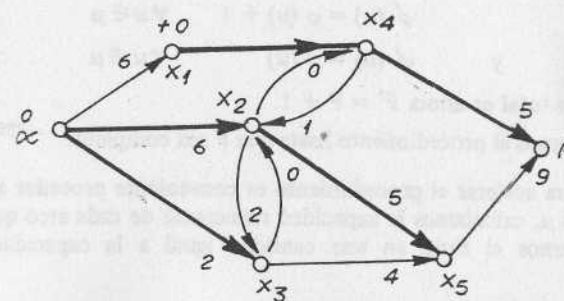
$$\varphi'(u) = \varphi(u) \quad \forall u \notin \bar{\mu}$$

El nuevo flujo

$$F' = F + 1$$

Si con este nuevo flujo, y aplicando los pasos a) y b) no alcanzamos a marcar el vértice  $\beta$ , este nuevo flujo será el flujo total máximo, es decir, será el  $F^0$ .

Continuemos con el ejemplo. Habíamos llegado a obtener el siguiente flujo completo



Damos a  $\alpha$  el valor 0.

Desde  $\alpha$  sólo podemos alcanzar  $x_1$  dándole + 0. En efecto

$$x_1 \in \Gamma(\alpha) \text{ y } \varphi(\alpha, x_1) = 6 \quad \text{o sea} \quad \varphi(\alpha, x_1) < c(\alpha, x_1)$$

en cambio, si bien  $x_2 \in \Gamma(\alpha)$  su

$$\varphi(\alpha, x_2) = c(\alpha, x_2) = 6$$

y lo mismo ocurre con  $x_3$ .

Desde  $x_1$  no podemos llegar a  $x_4$ , pues

$$\varphi(x_1, x_4) = c(x_1, x_4)$$

Luego el proceso queda interrumpido.

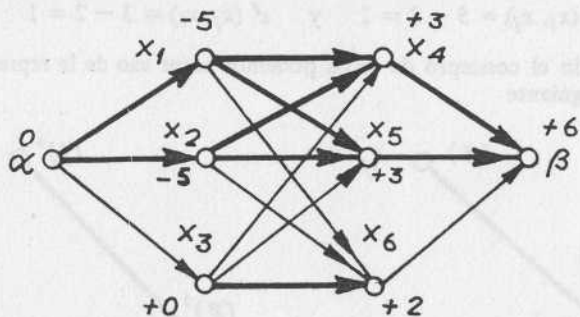
En consecuencia

$$F = 6 + 6 + 2 = 14$$

es el flujo total máximo, o sea

$$F^0 = 14$$

Con el objeto de visualizar mejor esta segunda parte tomemos el ejemplo de flujo completo que expusimos al comienzo de este tema.



Damos a  $\alpha$  el índice 0.

Hemos suprimido el valor de las capacidades así como los valores de los flujos actuales sobre los arcos para que resalten los índices.

De  $\alpha$  podemos alcanzar solamente  $x_3$ .

Como

$$x_3 \in \Gamma(\alpha) \text{ y } \varphi(\alpha, x_3) = 1$$

es menor que

$$c(\alpha, x_3) = 2$$

lo marcaremos con + 0.

Desde  $x_3$  alcanzo  $x_4$  y  $x_5$  a los cuales marcamos con + 3.

Desde  $x_4$  ó desde  $x_5$  podemos marcar  $x_1$  y  $x_2$ . (Usaremos  $x_5$ ).

Luego daremos a  $x_1$ , -5 y a  $x_2$  el índice -5

En efecto

$$x_1 \in \Gamma^{-1}(x_5) \text{ y } \varphi(x_1, x_5) > 0$$

$$\text{Lo mismo } x_2 \in \Gamma^{-1}(x_5) \text{ y } \varphi(x_2, x_5) > 0$$

Desde  $x_1$  ó desde  $x_2$  podemos alcanzar  $x_6$ . (Usaremos  $x_2$ ). En efecto,

$$x_6 \in \Gamma(x_2) \text{ y } \varphi(x_2, x_6) < c(x_2, x_6)$$

Luego asignaremos a  $x_6$  el índice + 2.

Y por análogas razones, podemos marcar  $\beta$  con + 6.

Detectamos la cadena

$$\bar{\mu} = (\alpha, x_3, x_5, x_2, x_6, \beta)$$

Modificamos los flujos así

$$\varphi'(\alpha, x_3) = \varphi(\alpha, x_3) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$\varphi'(x_3, x_5) = \varphi(x_3, x_5) + 1 = 0 + 1 = 1$$

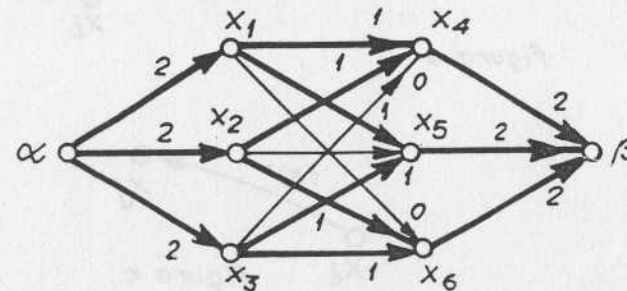
$$\varphi'(x_2, x_5) = \varphi(x_2, x_5) - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$\varphi'(x_2, x_6) = \varphi(x_2, x_6) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$\varphi'(x_6, \beta) = \varphi(x_6, \beta) + 1 = 1 + 1 = 2$$

$$F' = F + 1 = 5 + 1 = 6$$

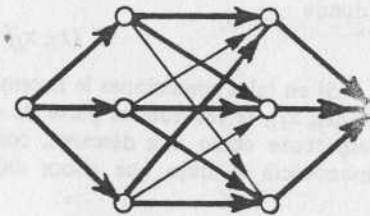
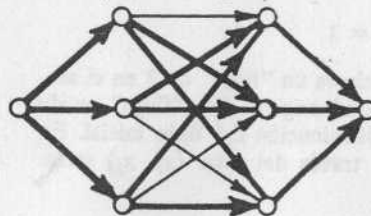
Obtenemos



Si ahora repetimos el proceso de marcación, vemos que marcamos el vértice  $\alpha$  con el índice 0 y que el proceso se interrumpe. Es decir, que el flujo total óptimo es  $F^0 = 6$ .

*Nota:* Para marcar  $x_1$  y  $x_2$  usamos arbitrariamente el vértice  $x_5$ .

Proponemos al lector utilizar  $x_4$ . En tal caso encontrará estas dos distribuciones, también óptimas



## Procedimiento resumido

Los pasos del algoritmo pueden resumirse en el siguiente procedimiento:

- 1) Se busca un camino desde la fuente  $\alpha$  hasta el sumidero  $\beta$  que tenga sus arcos con capacidad no nula.
- 2) Dentro de ese camino se busca el arco que tenga la capacidad mínima (que representaremos con  $c_m$ ) e incrementamos el flujo en ese camino en la cantidad  $c_m$ .
- 3) Disminuimos la capacidad de los arcos situados en el camino en esa cantidad  $c_m$ .
- 4) Aumentamos la capacidad de los arcos de sentido opuesto en esa misma cantidad.

Retomamos al paso 1) hasta que no encontramos más caminos con arcos no saturados.

## Aclaraciones previas

- I. Sea, por ejemplo, el arco  $(x_i, x_j)$  cuya capacidad es 4 (fig. a).

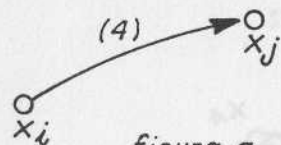


figura a

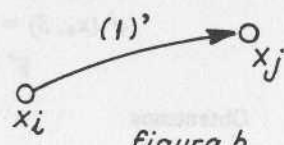


figura b

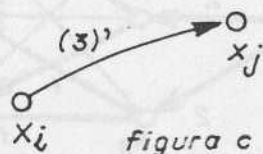


figura c

Si le asignamos el flujo  $\varphi(x_i, x_j) = 3$ , para saturarlo tendríamos que hacerle pasar después un flujo de 1. Es decir, cuando le asignamos  $\varphi(x_i, x_j) = 3$ , su capacidad se reduce a 1. En otras palabras, su capacidad residual

$$c'(x_i, x_j) = c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j) \quad (\text{fig. b})$$

de donde

$$c'(x_i, x_j) = 4 - 3 = 1$$

Si en tales condiciones le hacemos pasar ahora un "flujo" de 2 en el sentido  $(x_j, x_i)$ , le restituimos parte de su capacidad original. Ese "flujo" puede interpretarse como una descarga, como una disminución del flujo inicial. En consecuencia el flujo que ahora existiría, a través del arco  $(x_i, x_j)$  sería:

$$\varphi(x_i, x_j) = 3 - 2 = 1$$

y la nueva capacidad residual

$$c'(x_i, x_j) = 4 - 1 = 3 \quad (\text{fig. c})$$

II. Sean  $x_i$  y  $x_j$  dos vértices unidos por un par de arcos de sentido contrario, cuyas capacidades son:

$$c(x_i, x_j) = 5 \quad \text{y} \quad c(x_j, x_i) = 3 \quad (\text{fig. d})$$

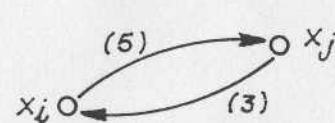


figura d

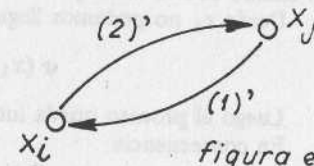


figura e

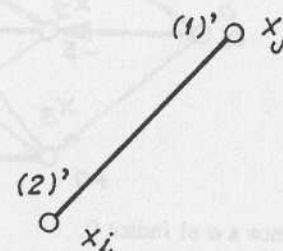
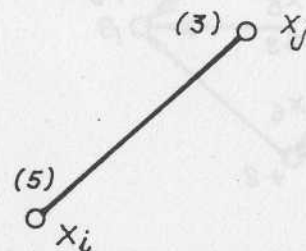
Si esos arcos fueran recorridos por los flujos siguientes

$$\varphi(x_i, x_j) = 3 \quad \text{y} \quad \varphi(x_j, x_i) = 2$$

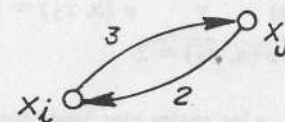
quedarían con las capacidades residuales

$$c'(x_i, x_j) = 5 - 3 = 2 \quad \text{y} \quad c'(x_j, x_i) = 3 - 2 = 1$$

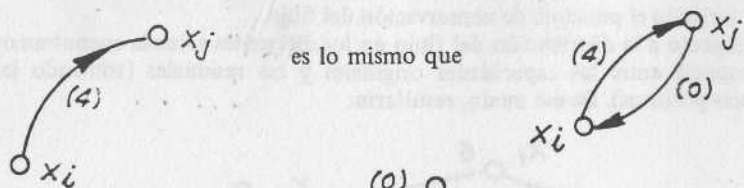
Utilizando el concepto de arista podemos hacer uso de la representación simplificada siguiente



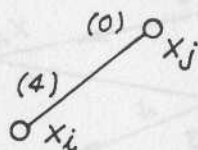
Los flujos sobre los arcos se obtienen restando las capacidades originales y las residuales. Luego



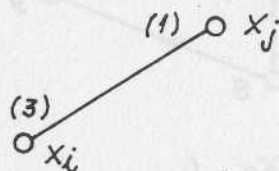
III. Si el vínculo entre  $x_i$  y  $x_j$  se hace a través de un sólo arco



Se lo puede representar

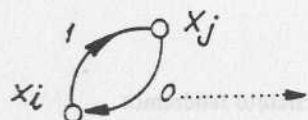


Si lo atraviesa un flujo  $\varphi(x_i, x_j) = 1$ ; podemos expresar el resultado



Si partimos de esa representación podemos deducir los flujos sobre los arcos tomando las diferencias entre las capacidades originales y las residuales (sólo las diferencias positivas tienen significado).

Luego, obtendríamos



pues  $0 - 1 = -1$  carece de significado.

#### Aplicación del procedimiento resumido

Recordemos que si  $F$  es el flujo total, es decir, si

$$F = \varphi_\alpha = \sum_{u \in U_\alpha} \varphi(u)$$

las capacidades originales de los arcos quedan modificadas por el valor del flujo que los atraviesa. Recordemos también, de las aclaraciones previas (III), que cuando un arco  $(x_i, x_j)$  es atravesado por un flujo  $\varphi(x_i, x_j)$ , sus capacidades residuales resultarán:

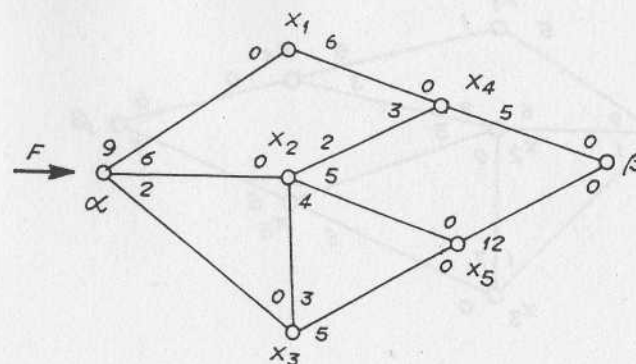
$$c'(x_i, x_j) = c(x_i, x_j) - \varphi(x_i, x_j)$$

pues lo atraviesa en el sentido del arco, y

$$c'(x_j, x_i) = c(x_j, x_i) + \varphi(x_i, x_j)$$

pues le aumenta su capacidad inicial.

Retomemos el ejemplo ya visto:



Sea

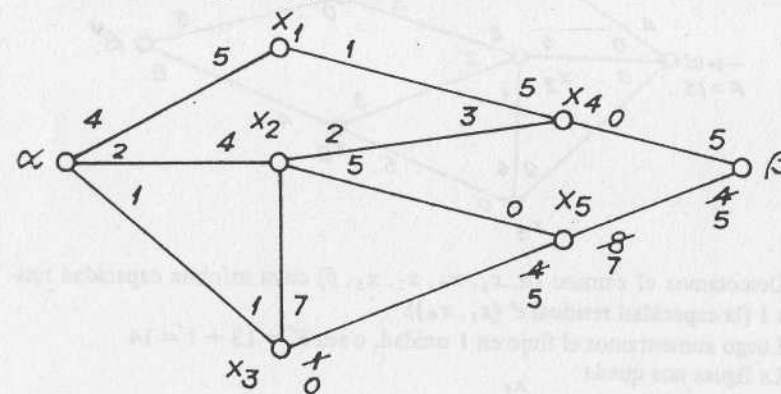
$$\varphi(\alpha, x_1) = 5$$

$$\varphi(\alpha, x_2) = 4$$

$$\text{y } \varphi(\alpha, x_3) = 1$$

Es decir,  $F = 10$ .

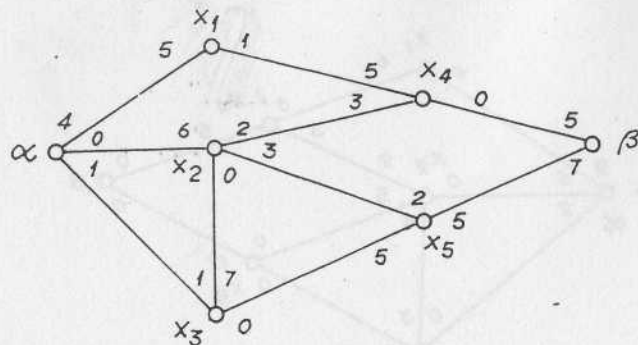
Si asignamos los flujos anteriores, las capacidades de los arcos (indicadas sin paréntesis, para simplificar) quedarán modificadas así:



Vemos que a través del camino  $(\alpha, x_2, x_5, \beta)$  podemos aumentar el flujo en 2. O sea

$$F' = 10 + 2 = 12$$

Obtenemos:

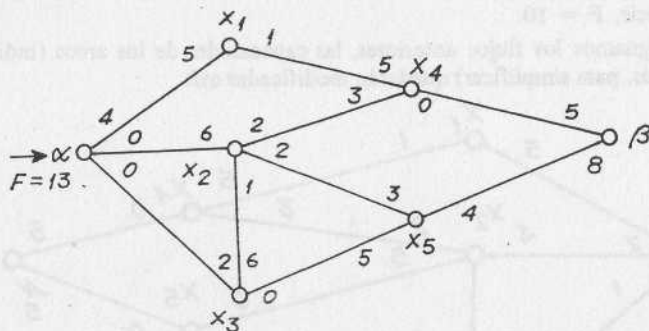


Puedo aumentar el flujo a través del camino  $(\alpha, x_3, x_2, x_5, \beta)$  cuya mínima capacidad residual es 1.

Luego

$$F' = 12 + 1 = 13$$

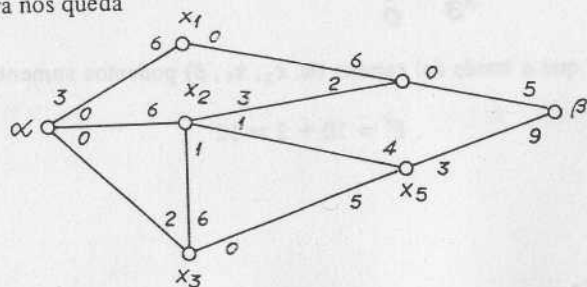
Nos quedará



Detectamos el camino  $(\alpha, x_1, x_4, x_2, x_5, \beta)$  cuya mínima capacidad residual es 1 (la capacidad residual  $c'(x_1, x_4)$ ).

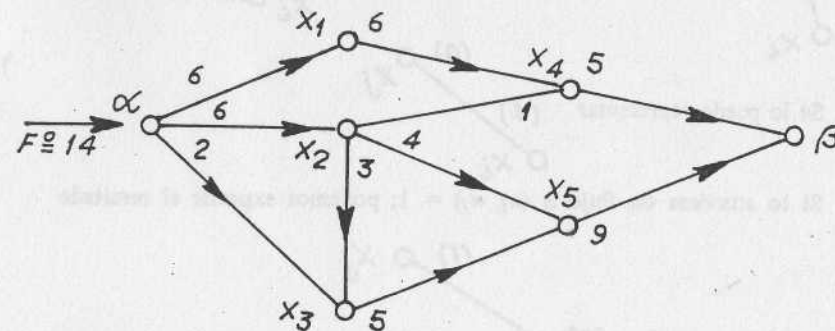
Luego aumentamos el flujo en 1 unidad, o sea  $F' = 13 + 1 = 14$

La figura nos queda

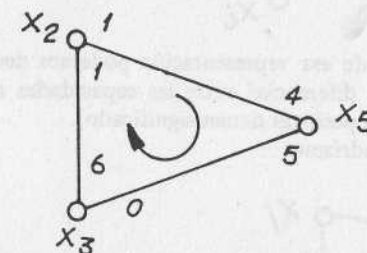


Puede verse que no es posible aumentar el flujo. En efecto los arcos  $(\alpha, x_2)$  y  $(\alpha, x_3)$  están saturados. El arco  $(\alpha, x_1)$  admitiría un flujo adicional de 3 pero como el arco  $(x_1, x_4)$  está saturado, dicho flujo se "almacenaría" en  $x_1$ , contrariando el principio de conservación del flujo.

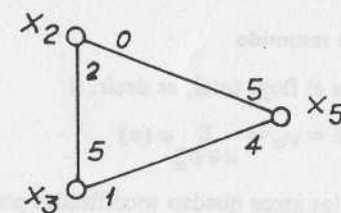
Respecto a la distribución del flujo en los diferentes arcos la encontramos por diferencia entre las capacidades originales y las residuales (tomando las diferencias positivas). De ese modo, resultaría:



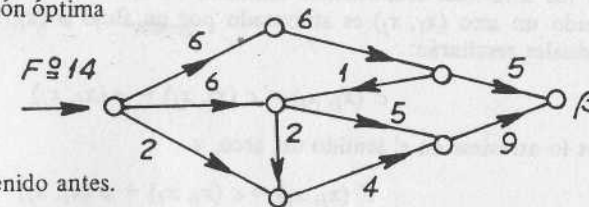
Nota: Si en la malla



hacemos "recircular" una unidad a través del circuito tendremos



llegando a la distribución óptima



que ya habíamos obtenido antes.

Un modo de controlar que hemos optimizado el proceso, es hacer uso del concepto que a continuación se describe.

### Corte de una red

Dado un subconjunto de vértices que *incluya* la salida  $\beta$  y *excluya* la entrada  $\alpha$ , o sea

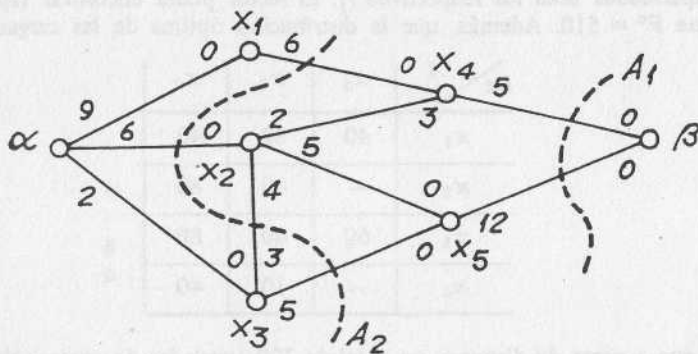
$$A = \{x/x \in E\} \text{ donde necesariamente } \alpha \notin A \text{ y } \beta \in A$$

se llama *corte*  $U_A^-$  al conjunto de arcos que llegan a vértices de  $A$  desde nodos que no le pertenecen.

Se llama *capacidad del corte*, a la suma de las capacidades de los arcos que lo forman.

$$c(U_A^-) = \sum_{u \in U_A^-} c(u)$$

Así por ejemplo podemos tomar el corte  $A_1$  indicado con línea de trazos:



$$A_1 = \{\beta\}$$

$$U_{A_1}^- = \{(x_4, \beta); (x_5, \beta)\}$$

$$c(U_{A_1}^-) = 5 + 12 = 17$$

otro corte que indicamos es:

$$A_2 = \{x_2, x_4, x_5, \beta\}$$

$$U_{A_2}^- = \{(x_1, x_4); (\alpha, x_2); (x_3, x_2); (x_3, x_5)\}$$

$$c(U_{A_2}^-) = 6 + 6 + 3 + 5 = 20$$

Toda unidad de materia que se desplace desde  $\alpha$  hacia  $\beta$  usará por lo menos una vez un arco de  $U_A^-$ .

Luego cualquiera sea  $F$  y el corte  $U_A^-$ , se verificará que

$$F \leq c(U_A^-)$$

o sea que la capacidad de cualquier corte representa una cota superior para el flujo.

En consecuencia si encontramos un valor de la capacidad de algún corte que iguale al flujo  $F$  alcanzado, podemos afirmar que:

*El corte es de capacidad mínima y que el flujo es máximo.*

Verifiquemos en los ejemplos dados que con el proceso de marcación logramos definir el corte de capacidad mínima.

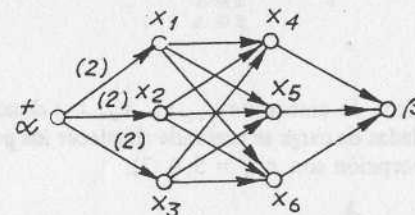
El proceso de marcación nos produce una bipartición del conjunto

$$E = \{\alpha, x_1, \dots, \beta\}$$

Definiendo como  $A$  al conjunto de vértices no marcados, cumplimos con las condiciones:

$$\alpha \notin A \quad \text{y} \quad \beta \in A$$

Retomemos, por ejemplo, el ejercicio de pág. 81.



Recordemos que con  $F = 6$ , sólo pudimos marcar el vértice  $\alpha$ .

En tal caso podemos poner

$$A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \beta\}$$

$$U_A^- = \{(\alpha, x_1); (\alpha, x_2); (x, x_3)\}$$

$$\therefore c(U_A^-) = 2 + 2 + 2 = 6$$

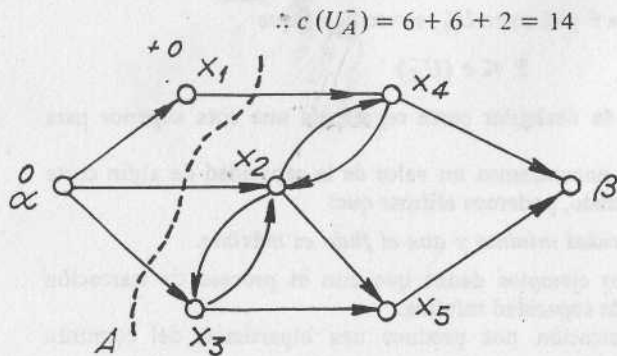
es decir se cumple  $F = c(U_A^-)$ , de donde

$$F = F_{\max} \quad \text{y} \quad c(U_A^-) \text{ es mínima}$$

En el otro ejemplo también resuelto (pág. 79), el proceso de marcación se interrumpió cuando habíamos llegado a  $F = 14$ . Podemos hacer:

$$A = \{x_2, x_3, x_4, x_5, \beta\}$$

$$U_A^- = \{(x_1, x_4); (\alpha, x_2); (\alpha, x_3)\}$$

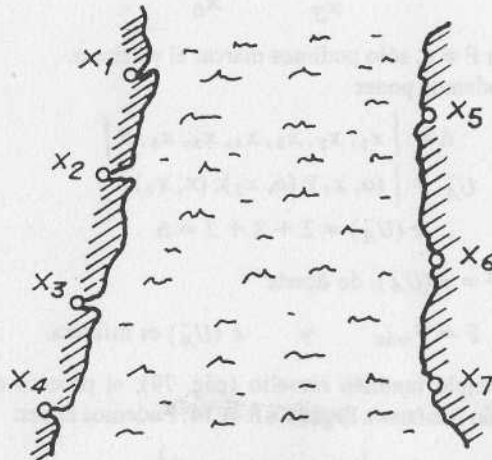


En otras palabras, cuando un valor de flujo iguala la capacidad de algún corte, dicho flujo total es el flujo máximo y dicho corte es de capacidad mínima. Esto no es más que el Teorema de Ford-Fulkerson: En una red de transporte dada, el valor máximo de un flujo es igual a la capacidad mínima de un corte

$$\max_F F = \min_{\substack{U_A \\ \alpha \notin A \\ \beta \in A}} c(U_A)$$

#### Ejercicio propuesto:

I. Desde los puertos de embarque  $x_1, x_2, x_3, x_4$ ; donde se dispone de  $d_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) toneladas de carga se pretende abastecer los puertos  $x_5, x_6, x_7$  cuyas capacidades de recepción son  $r_j$  ( $j = 5, 6, 7$ ).



Los puertos, ubicados en continentes diferentes, están vinculados por líneas marítimas cuyas capacidades de transporte  $c_{ij}$  se conocen. Se pretende conocer cual es el tonelaje que se puede enviar desde cada puerto de embarque hasta

cada puerto destino a fin de hacer máximo el transporte desde un continente al otro.

Los datos son los siguientes:

|                    | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $d_i$      |
|--------------------|-------|-------|-------|------------|
| $x_1$              | 40    | 80    | 40    | 200        |
| $x_2$              | 0     | 40    | 80    | 150        |
| $\ C_{ij}\  = x_3$ | 80    | 40    | 80    | 300        |
| $x_4$              | 80    | 80    | 40    | 50         |
| $r_j$              | 100   | 300   | 250   | 700<br>650 |

Sugerencia: Unir  $x_1, x_2, x_3, x_4$  a una fuente  $\alpha$  con arcos cuyas capacidades sean las respectivas  $d_i$ . Análogamente los  $x_j$  con un sumidero  $\beta$  con arcos cuyas capacidades sean los respectivos  $r_j$ . El lector podrá encontrar rápidamente que  $F^0 = 510$ . Además, que la distribución óptima de las cargas es:

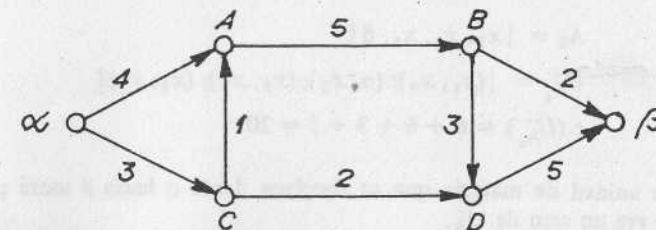
| De \ A | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ |
|--------|-------|-------|-------|
| $x_1$  | 40    | 80    | 40    |
| $x_2$  | —     | 40    | 80    |
| $x_3$  | 60    | 40    | 80    |
| $x_4$  | —     | 10    | 40    |

Observe que a pesar de disponer un total de 700 toneladas de carga, sólo se puede satisfacer algo más del 78 % de la necesidad total (650 toneladas).

#### Ejercicio II.

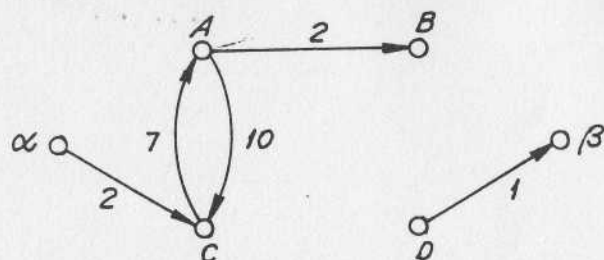
Considere el problema del transporte de carbón desde el yacimiento a la usina, propuesto como introducción a este tema.

a) Verifique si obtiene también usted, la siguiente distribución óptima de flujos en los arcos.



b) Dado que las necesidades de la usina no pueden ser satisfechas a pesar que la producción del yacimiento es suficiente, ¿cómo podríamos aumentar la capacidad de red de transporte?

Sugerencia: Considere la red parcial formada por los arcos cuya capacidad residual no sea nula



¿Qué nueva canalización debería materializar?

¿Qué capacidad debería tener para que la solución fuese factible?

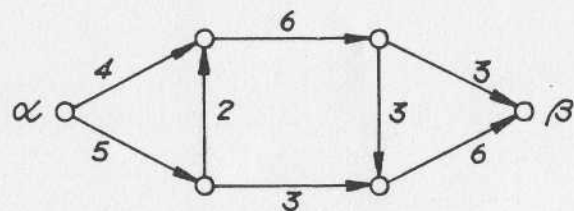
R: Reforzar con "tramos" paralelos a (C, D) o a (B, D) con capacidad 1; es decir, elevar las capacidades de (C, D) o de (B, D) a 3.

c) Dado que el proceso de marcación del algoritmo de Ford-Fulkerson, nos permite determinar el corte de capacidad mínima. ¿Qué alternativa adicional puede visualizar, con respecto a las obtenidas en b)?

R: Aumentar en 1 a la capacidad de (B, β).

d) Si la red de transporte, fuese la resultante de materializar las tres alternativas halladas, pero la necesidad de la usina igualase la producción del yacimiento. ¿Sería esta "nueva red" suficiente para asegurar el abastecimiento? Si la respuesta fuese afirmativa, ¿cuál es la distribución óptima de los transportes parciales?

R: Sí.



### Ejercicio III.

El país desea materializar cuatro proyectos, que denominaremos: Energía, Transportes, Acero, y Petroquímica. Estos proyectos requieren la inversión de los siguientes montos (en miles de millones de unidades monetarias):

| Energía | Transp. | Acero | Petroq. | Total necesario |
|---------|---------|-------|---------|-----------------|
| 28      | 10      | 12    | 20      | 70              |

Se han efectuado investigaciones sobre las posibles fuentes de financiación. Se las ha agrupado en nacionales y externas. Las primeras se dividieron en estatales y privadas. Se ha encontrado que estarían dispuestas a financiar, cada proyecto, hasta los montos que a continuación se indican:

|      | Energía | Transp. | Acero | Petroq. | Monto máximo |
|------|---------|---------|-------|---------|--------------|
| N.E  | 15      | 12      | 7     | 5       | 35           |
| N.P  | 2       | 12      | 5     | 3       | 17 (12)      |
| Ext. | 30      | 20      | 20    | 10      | 30           |

La columna de monto máximo se debe a que el Estado se ha fijado dicha cota 35 como monto total disponible, y ha determinado la conveniencia de no contraer nuevas deudas externas que superen el total de 30. Respecto a las fuentes privadas nacionales, si bien tiene una disponibilidad de 17, para los rubros que nos interesan ella sería verdaderamente de 12.

Si se procediera orientando el crédito estatal en el orden  $En \rightarrow Tr \rightarrow Ac \rightarrow Pet$ , se obtendría la siguiente distribución.

|       | E  | T  | A  | P         | Crédito no utilizado |
|-------|----|----|----|-----------|----------------------|
| N.E   | 15 | 10 | 7  | 3 (saldo) | —                    |
| N.P   | 2  | —  | 5  | 3         | 2 (o 7)              |
| Ext.  | 11 | —  | —  | 10        | 9                    |
| Total | 28 | 10 | 12 | 16        |                      |

Examinada la distribución anterior, puede verse que el proyecto petroquímico sería financiable en sólo el 80 %. También que del monto total necesario (70) sólo se financiarían 66 miles de millones.

Sin embargo, y el lector puede verificarlo, la orientación óptima del crédito nos permitiría financiar 68 miles de millones. Ello resulta de esta distribución óptima de flujos:

|      | E  | T  | A | P  | Crédito no<br>utilizado |
|------|----|----|---|----|-------------------------|
| N.E. | 13 | 10 | 7 | 5  |                         |
| N.P. | 2  | —  | 5 | 3  | 2                       |
| Ext. | 13 | —  | — | 10 | 7                       |

Total      28      10      12      18

b) Pruebe que si se logra que la fuente privada nacional, transfiera su disponibilidad crediticia para transporte hacia la petroquímica o sea

|      | E | T | A | P | M. Máx. |
|------|---|---|---|---|---------|
| N.P. | 2 | — | 5 | 5 | 12      |

todos los proyectos podrían ser financiados en un 100 %

## CAPITULO 6

### ADMINISTRACION DE PROYECTOS POR ANALISIS DE REDES

#### Introducción a la planificación y programación.

##### Generalidades:

Planificar es arte y es ciencia. Mediante la planificación, la organización puede prever el desarrollo de un conjunto de operaciones que concurren a la obtención de un resultado.

La planificación nos permite realizar una penetración en el "futuro". Como toda penetración en el futuro no puede revestir el carácter de "cierta" sino de "probable" pues sólo el pasado puede conocerse con certeza.

La metodología que sintéticamente expondremos se puede aplicar a un conjunto de actividades cuyos elementos pueden ser físicos o intelectuales.

El problema es: qué hacer, o cómo tenemos que actuar, cuando nos enfrentamos con la necesidad de realizar eficientemente una serie de actividades que nos permiten alcanzar un objetivo.

El deseo de establecer la "fecha probable" de terminación de "algo" significa situar en el tiempo todas las actividades que concurren al logro de ese "algo".

Es por ello, que nuestra primera obligación será definir correctamente el objetivo deseado. Luego, todos los elementos necesarios para alcanzarlo, es decir, el conjunto de actividades que lo definen.

Pero la realización de actividades significa la movilización y uso de recursos.

El recurso más importante de cualquier actividad es el recurso humano, siguiéndole en importancia los de tipo material.

Estos recursos se deben organizar, sincronizar en su accionar, a los efectos que el objetivo se consiga de la manera más eficiente, entendiendo por eficiencia, menor tiempo o menores costos o máxima seguridad. . .

No se puede pensar en alcanzar el objetivo en el mínimo tiempo consiguiendo simultáneamente los menores costos. Existe cierta incompatibilidad entre la brevedad en el tiempo y la minimización de los costos.

Un método por todos conocido resulta utilizar el diagrama de Gantt. Cuando el proyecto (operación global) está formado por pocos elementos, la memoria del planeador puede retener sin mayores inconvenientes las interdependencias entre las tareas, y por lo tanto el orden lógico en que éstas deben realizarse.

Cuando el proyecto está formado por muchas tareas, es evidente que la persona que planea "no puede retener mentalmente" las ligazones que entre ellas existen. Es decir la capacidad de recuerdos del planificador ha hecho crisis.

Es precisamente ésta, la primera y fundamental ventaja de la planificación por "grafes".

Los grafes nos permitirían construir "un mapa del futuro" y sobre éste, encontrar el camino crítico, que vendría a representar el camino más largo hacia ese futuro. La ejecución del proyecto significa, no obstante, la realización de todas las tareas, el recorrido integral de todos los arcos de aquel "mapa".

Dividiendo el problema en sus etapas de "pensar" y luego "ejecutar", el método nos permite:

- a) Planificar;
- b) Programar;
- c) Controlar.

a) *Planificar*: Es establecer la secuencia lógica de los acontecimientos. Es visualizar el orden en que deben producirse. Su resultado es la red (o diagrama de flechas). Ella nos permite calcular el camino crítico: subconjunto de tareas que condicionan la duración del proyecto.

Se ha determinado estadísticamente que generalmente lo constituyen un 10 a un 20 % del total de tareas que definen el objetivo establecido.

b) *Programar*: Es aplicar el calendario (almanaque) al plan seleccionado.

Ello nos permite visualizar cómo debieran distribuirse los recursos, o sea, estimar las necesidades de mano de obra, de equipos, de máquinas, de disponibilidad financiera, etc. Evidentemente la distribución elegida debe cumplir con las restricciones que la Empresa prevea con respecto a las "disponibilidades" de tales recursos.

Ver si se concilian las necesidades con las disponibilidades nos permitirá apreciar si es o no factible.

c) *Controlar*: Sirve para visualizar la ejecución. Evidentemente, sólo habiendo establecido un programa, estamos en condiciones de juzgar si los acontecimientos se producen en fecha, con adelanto, o con retraso. Es sólo comparando con el programa que podremos evaluar la influencia de las desviaciones y por lo tanto determinar las acciones a seguir para corregir sus implicancias. Solamente con un programa confeccionado "a priori" podemos realizar la Dirección por Excepción.\*

\* Si quisiéramos dar una síntesis de lo expuesto hasta ahora, el problema que nos preocupa consistiría en coordinar una serie de actividades, y los recursos necesarios para efectuarla, con el objeto de obtener eficientemente el objetivo propuesto. Por ello, Ackoff-Sasieni, proponen designarlos como problemas de coordinación agregando que no obstante se los conoce vulgarmente por el nombre de las técnicas empleadas para solucionarlos: Pert, camino crítico, etc.

## 1. PLANIFICACION

### 1. Listado de tareas

Definido claramente el objetivo que se desea alcanzar, se establece el conjunto de tareas que deben realizarse para alcanzarlo. Es decir, se establece la "Lista de Tareas". Aquí debemos hacer referencia al rol de la escala en la presentación del fenómeno.

Todo el proyecto podríamos considerarlo como una única gran tarea. Si la analizamos podremos detectar grandes actividades parciales componentes. Profundizando el análisis podríamos determinar un número mayor de actividades elementales. Surge entonces la pregunta:

¿Hasta dónde debemos ir en los detalles?

Como norma general debemos tener en cuenta que el análisis del proceso total nos debe llevar a una división en tareas que nos permita controlar los acontecimientos intermedios que "realmente" deseamos controlar, es decir: lo que deseamos controlar nos indica hasta qué detalles debemos incluir en la red.

No debemos olvidar que un aumento continuo del número de tareas nos llevará a "tener en cuenta todo" pero lamentablemente a una situación en que su utilización ya no es cómoda.

El aumento de detalles aumenta la complejidad de la red, y no siempre su utilidad operativa.

Puede decirse, a título indicativo, que no conviene incluir tareas cuya duración sea menor del 5 % del tiempo total del proyecto estimado "a priori".

Puede ser que después de su primer planeamiento la importancia de alguna sucesión nos indique la conveniencia de una mayor división.

Por otra parte, una tarea parcial puede ser muy delicada, de responsabilidad de un sector especializado. Es decir, puede ser la tarea total de un grupo y éste, para su mejor cumplimiento, estimar conveniente analizarla como si fuese un totalidad. Dicha tarea daría origen a una subred donde se puede aplicar el mismo criterio de subdivisión.

### 2. Se establece el orden lógico de realización.

Algunas tareas necesariamente deberán hacerse en secuencia. Otra u otras exigen la realización de una o de un conjunto de tareas que le son previas.

Otras en cambio permitirían su cumplimiento simultáneo. Es decir, en general, toda tarea tendrá tareas precedentes, simultáneas y otras que la continuarán.

• Cuando examinemos una tarea nos convendrá establecer su dependencia de otras. Así iremos construyendo "eslabones" que luego, reunidos, nos darán el diagrama de flechas, nuestro tablero de juego.

Para ello debemos tener en cuenta qué tareas deben necesariamente hacerse previamente, cuáles necesariamente después, y cuáles pueden realizarse paralelamente.

Creemos muy conveniente empezar por las últimas, o última, e ir analizando el proceso hacia adelante, puesto que es el objetivo final quién nos servirá siempre de guía.

Llevando a un gráfico este orden lógico, habremos construido la red que nos dará una visión clara de:

- la secuencia de tareas;
- sus interrelaciones.

Se ha dicho que el trazado de ese diagrama, o sea, de esa representación gráfica del plan, ya le da a la organización del 60 al 80 % de la utilidad de todo el trabajo de análisis.

### 3. Elementos del diagrama de flechas. (Solamente son tres).

- 1) círculo para representar los acontecimientos;
- 2) flecha llena para tareas o actividades;
- 3) flecha de trazos para las tareas ficticias.

### 4. Definición del acontecimiento.

Es un instante en el tiempo, fácilmente identificable.

El comienzo de una tarea es un acontecimiento. La finalización también. No obstante un acontecimiento de la red puede significar que se han finalizado varias tareas, o que pueden comenzar varias.

Al acontecimiento también se lo puede llamar nodo, etapa, suceso, hito.

### 5. Tarea o actividad.

Es el trabajo que debe realizarse. Su realización nos conduce de un acontecimiento a otro y consume recursos y tiempo.

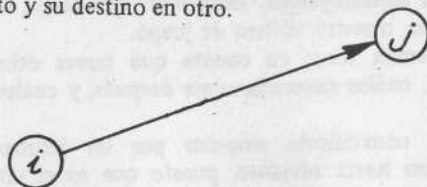
En realidad, el tiempo es un recurso y lamentablemente siempre escaso para quien debe realizar. Al decir... "consume recursos y tiempo", enfatizamos la importancia de este recurso que tan a menudo es olvidado por todos aquéllos que deben actuar en el quehacer económico.

En algunos casos el "trabajo" no es sensible pues no requiere otro recurso que tiempo. Es una tarea de espera. Tanto a uno como a otro se lo dibuja mediante una flecha llena.

En otros casos, ni siquiera requerirá tiempo, su inclusión como actividad la tenemos que hacer para respetar la construcción lógica de la red. Estas actividades que ni siquiera insumen tiempo se denominan actividades ficticias. Su representación es una flecha de trazos.

### 6. Representación gráfica y simbólica de actividades y acontecimientos.

Las actividades están representadas por flechas. Cada flecha tiene su origen en un acontecimiento y su destino en otro.



Es decir que una tarea queda perfectamente identificada por su nodo origen y por su nodo destino.

La longitud de la flecha, así como su orientación, no tienen ningún significado especial. Se los elige teniendo en cuenta solamente las conveniencias del dibujo.

En general, con  $i$  nombramos el acontecimiento inicial u origen de la actividad. Con  $j$  al final o destino.

En consecuencia la tarea, quedará identificada, como  $(i, j)$ .

En cuanto a la duración de la tarea (tiempo necesario para realizarla) con  $t_{ij}$ . Inicialmente utilizaremos el tiempo normal, de costo menor, que denominaremos con  $D_{ij}$ .

La identificación de las actividades por sus acontecimientos inicial ( $i$ ) y final ( $j$ ) permite mantener el anonimato de los trabajos cuando deben procesarse fuera del nivel decisional. Ésto es importante para conservar el secreto comercial, y aún más evidente para mantener el secreto militar cuando se trata de operaciones bélicas o que se refieran a la defensa nacional.

La numeración de los nodos se hace luego de dibujar la red y antes de calcular el camino crítico.

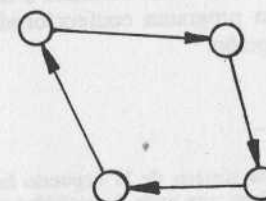
### 7. Reglas fundamentales a observar.

1. Cada tarea debe figurar una y sólo una vez en el diagrama.
2. Un acontecimiento es alcanzado sólo cuando todas las actividades que a él concurren se han realizado.
3. Ninguna actividad puede comenzar antes de que su nodo inicial haya sido alcanzado.

Las reglas 2 y 3 se pueden resumir en la siguiente expresión: Ninguna actividad puede comenzar hasta que todas las actividades precedentes hayan concluido.

Estas reglas deben observarse para dibujar como para analizar el diagrama.

4. Un acontecimiento sólo puede producirse una sola vez. Por lo tanto no pueden representarse circuitos como el indicado. Cuando se produce, ello es consecuencia de una mala planificación de las tareas: en general, de un error al establecer las dependencias de las tareas.



5. Todo acontecimiento tiene por lo menos una tarea que a él llega y una que en él tiene su origen.

Sólo el inicial no es destino de ninguna tarea, y solamente el último no es origen de ninguna actividad.

## 2. Reglas convenientes de observar.

1. Que las flechas no se corten.
2. Que se mantengan rectas.
3. Que difieran poco de longitud.
4. Que se dirijan de izquierda a derecha.
5. Que los ángulos entre flechas que emergen o arriban a un nodo sean grandes.

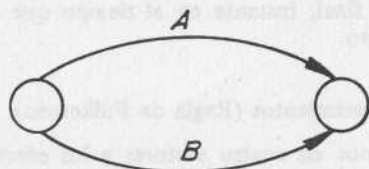
Estas reglas permiten obtener diagramas más claros. Es evidente que el cumplir las no introducirá ningún error lógico en la red.

## Uso de actividades ficticias.

Hemos dicho que las utilizaremos para mantener la construcción lógica de la red.

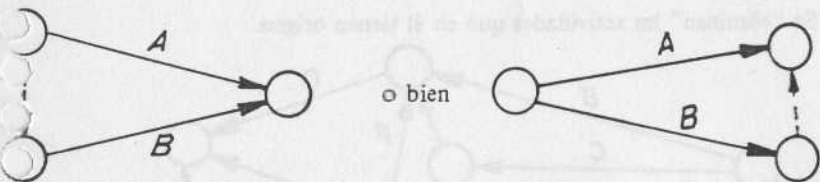
**Caso 1:** Dijimos que una tarea debía quedar perfectamente identificada por su origen y destino.

Luego no sería lógico hacer la representación siguiente:



Es tanto la tarea A como la B tendrían origen y fin iguales.

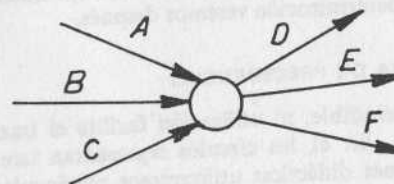
Impedimos este inconveniente mediante una de las representaciones siguientes:



**Caso 2:** Si tenemos el caso siguiente

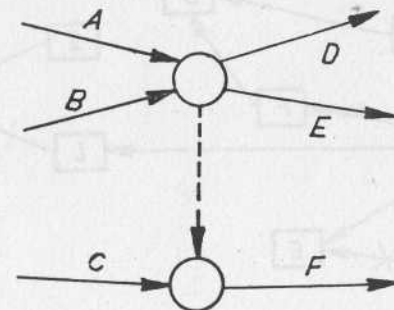
| Tarea | Depende de |
|-------|------------|
| D     | A y B      |
| E     | A y B      |
| F     | A, B y C   |

sería un error lógico efectuar la representación siguiente:



pues ello indicaría que las tareas D y E sólo pueden comenzar cuando también haya terminado la C.

Para respetar estrictamente las dependencias, debemos recurrir a la siguiente representación:



## 10. Construcción de la red.

Con la lista de actividades en la cual hemos agregado las dependencias (las precedentes de cada tarea), podemos dibujar la red. Introduciremos las actividades ficticias necesarias para mantener la construcción lógica.

Sea el ejemplo siguiente:

| Tarea | Depende inmediatamente de | Duración |
|-------|---------------------------|----------|
| A     | —                         | 5        |
| B     | A                         | 4        |
| C     | A                         | 3        |
| D     | B, C y F                  | 1        |
| E     | G y H                     | 2        |
| F     | G                         | 6        |
| G     | A, K y H                  | 7        |
| H     | —                         | 4        |
| I     | —                         | 10       |
| J     | I y L                     | 5        |
| K     | A                         | 2        |
| L     | G                         | 1        |

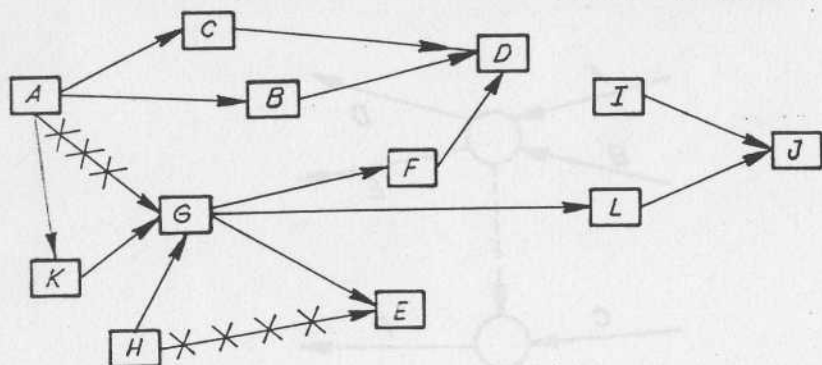
Utilizando las reglas explicadas puede fácilmente dibujarse la red. Encontraremos más adelante (pág. 105) el diagrama de flechas que incluye también los tiempos de duración cuya determinación veremos después.

### 10.1. USO DEL DIAGRAMA DE PRECEDENCIAS

Si bien no es imprescindible, su utilización facilita el trazado de la red. Es también un grafo. En él, los círculos representan tareas y los arcos las dependencias. Por razones didácticas utilizaremos rectángulos, en lugar de círculos, para representar a las tareas.

Colocando A, hacia la izquierda de nuestra hoja, podemos inmediatamente ubicar B y C puesto que dependen inmediatamente de aquella.

Razonando análogamente podremos obtener la siguiente representación:



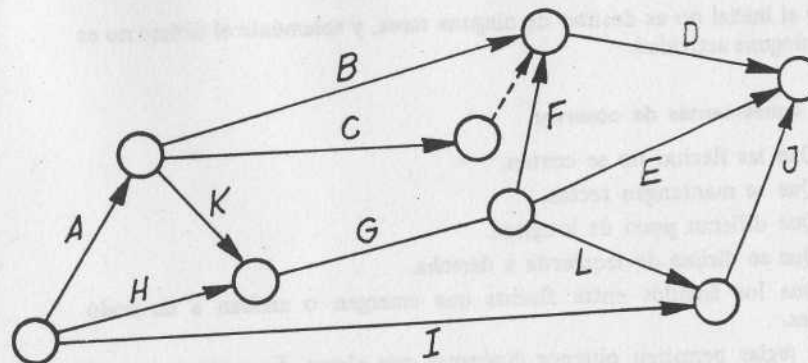
Observando el diagrama podemos determinar las dependencias superabundantes. En efecto, G depende de K y ésta de A, por lo tanto la dependencia directa de G con A está de más. En consecuencia, podemos eliminar el arco (A, G). Idéntico razonamiento nos permitirá eliminar el arco (H, E).

Además, observamos que las tareas A, H e I no tienen precedentes. Por lo tanto se ubicarán hacia la entrada de la red. Igualmente, las tareas D, J y E no preceden a ninguna; luego se ubicarán hacia la salida.

### 10.2. TRAZADO DE LA RED

Ubicamos A, H e I a partir de un mismo origen.

A partir del destino de la tarea A, representamos las B, C y K, por cuanto para realizarlas debemos haber efectuado la anterior.



Como G depende de las tareas K y H, ya representadas, las haremos concurrir a un destino común que será origen, al mismo tiempo, de la tarea G. Representada la tarea G, ya podemos indicar las tareas F, E y L.

Representadas las tareas B, C y F podemos dibujar la flecha correspondiente a la tarea D. Como B y C que tienen origen común concurrirían también a un destino común, hacemos uso de un nodo ficticio y de una tarea ficticia. De ese modo lograremos identificar a las tareas B y C con pares diferentes de acontecimientos.

Como I y L están dibujadas, podemos representar la J. Las tareas D, E y J las vinculamos a un mismo destino; ese destino final, no sale de la red, representa el acontecimiento final, instante en el tiempo que significa haber alcanzado el objetivo propuesto.

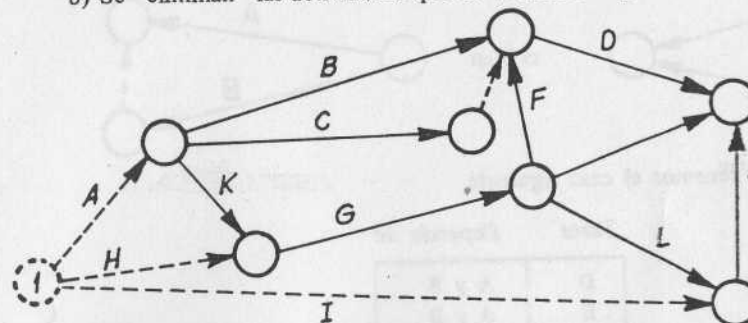
### 11. Numeración de los acontecimientos (Regla de Fulkerson).

Los nodos los dividiremos en cuatro sectores a los efectos de facilitar los cálculos. En el sector inferior colocaremos el número del nodo.

*Nota:* Por ahora y para facilitar el dibujo prescindiremos de tal división.

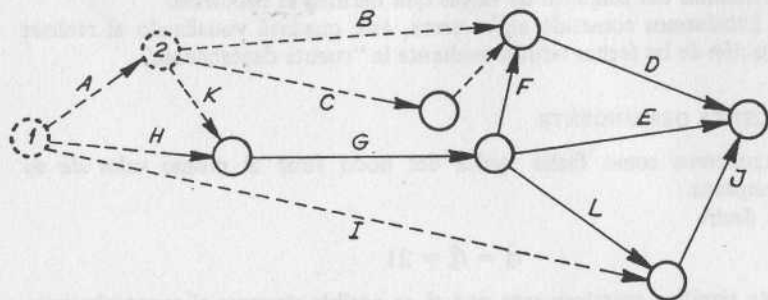
a) Al origen de la red (nodo inicial, nodo de ingreso) le asignamos el número uno (1).

b) Se "eliminan" las actividades que en él tienen origen.



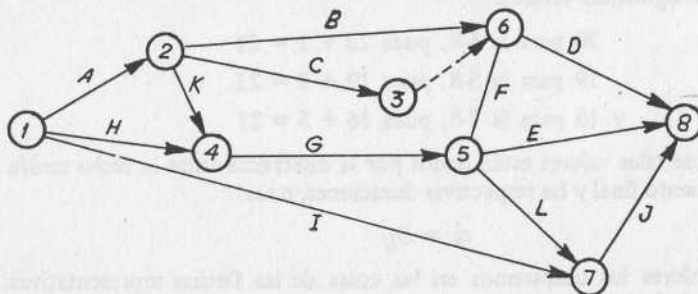
c) Se considera el subgrafe, o sea la nueva "red simplificada". A su nodo de entrada se le asigna el número.2.

d) Se "eliminan" los nodos numerados y las tareas que de ellos parten.



e) Se considera el nuevo subgrafe. Aquí se presentan dos entradas a la "red simplificada". Es indistinta su numeración. Colocaremos entonces, arbitrariamente, un 3 al origen de la ficticia y un 4 al origen de G.

El proceso se reitera hasta numerar el acontecimiento final (salida de la red). Procediendo de ese modo, se obtendrá la siguiente numeración:



En adelante podremos referirnos a las tareas por el par de dígitos que representan sus nodos origen y destino.

| Tareas | (i, j) |
|--------|--------|
| A      | 1-2    |
| B      | 2-6    |
| C      | 2-3    |
| D      | 6-8    |
| E      | 5-8    |
| F      | 5-6    |
| G      | 4-5    |
| H      | 1-4    |

| Tareas   | (i, j) | (continuación) |
|----------|--------|----------------|
| I        | 1-7    |                |
| J        | 7-8    |                |
| K        | 2-4    |                |
| L        | 5-7    |                |
| ficticia | 3-6    |                |

Nota: No es imprescindible efectuar la numeración de los nodos variando los valores en una unidad.

Muchas veces resulta conveniente dejar intervalos sin utilizar. Así podríamos haber utilizado 10, 20, 30, etc. Ello nos permitiría agregar alguna tarea que en nuestro análisis inicial habiéramos omitido sin necesidad de tener que efectuar una nueva numeración.

## 12. Cálculo del camino crítico.

### 12.1. CUENTA ASCENDENTE

Definiremos previamente algunos conceptos que nos serán de utilidad para su perfecto entendimiento.

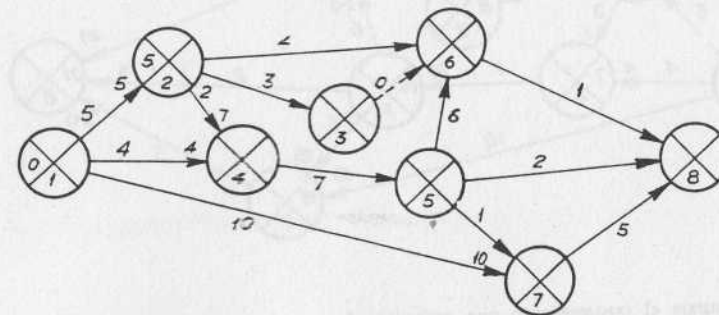
Dijimos que un acontecimiento se produce (tiene lugar) cuando se han realizado todas las tareas que a él concurren. Definiremos con fecha temprana del acontecimiento a la determinada por la finalización anticipada de tales tareas.

Este concepto nos permitirá ir estableciendo las fechas tempranas de todos los acontecimientos.

Si hacemos uso del "tiempo relativo", empezando a computar las fechas desde el instante en que se comenzarían los trabajos, es evidente que el nodo inicial de la red tendrá como fecha más temprana, el valor cero. O sea,  $t_1^0 = 0$ .

Para ubicar las fechas tempranas de cada nodo utilizaremos el sector de la izquierda.

De acuerdo con lo visto, la red será la siguiente:



Sobre los arcos hemos indicado las duraciones de las tareas (La 3-6, como es ficticia, tiene duración nula).

Como la tarea 1-2 comienza en fecha 0 y dura 5, lo más temprano que puede finalizar es en fecha  $0 + 5 = 5$ . Dicho valor lo colocamos sobre la punta de la flecha 1-2.

Análogamente podemos valorar las puntas de las flechas que se originan en 1. Así obtendremos:

5 para 1-2

4 para 1-4

10 para 1-7

La presentación del acontecimiento 2 sólo depende de la realización de la tarea 1-2. Luego éste nunca podía producirse, antes de la fecha 5; es decir, su fecha temprana  $t_2^0$  será 5 (Este valor lo colocamos en el sector izquierdo del nodo 2).

Ahora estamos en condiciones de valorar las flechas que salen de este nodo 2.

Obtenemos así:

$5 + 4 = 9$  para la 2-6

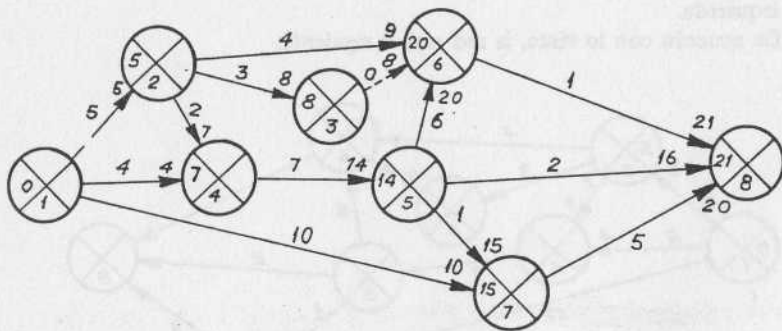
$5 + 3 = 8$  para la 2-3

$5 + 2 = 7$  para la 2-4

El nodo 4 sólo será alcanzado cuando se hayan realizado las tareas 1-4 y 2-4.

La 1-4 puede terminar no antes de 4 y la 2-4 no antes de 7. Es evidente entonces que la fecha temprana del acontecimiento 4 será 7, es decir  $t_4^0 = 7$ .

Reiterando este razonamiento podemos obtener el resto de las fechas tempranas de los nodos\*. Los cálculos quedan indicados, en la red, del siguiente modo.



\* Compare el razonamiento que acabamos de usar, con el utilizado en el cálculo del camino de longitud máxima (págs. 47 y 48).

La fecha temprana del nodo final nos indica el tiempo mínimo necesario para alcanzar el objetivo propuesto, es decir, la realización de todo el proyecto.

En otras palabras, terminada la cuenta ascendente habremos obtenido la fecha temprana del acontecimiento final o sea tendremos el tiempo mínimo de cumplimiento del conjunto de tareas que definen el problema.

Si hubiésemos cometido algún error, éste quedará visualizado al realizar la terminación de las fechas tardías mediante la "cuenta descendente".

## 12.2. CUENTA DESCENDENTE

Imponemos como fecha tardía del nodo final al mismo valor de su fecha temprana.

Es decir:

$$t_8^1 = t_8^0 = 21$$

Esto significa prácticamente que si es posible alcanzar el acontecimiento final en fecha 21, no admitiremos que aquél pueda producirse ni un instante después.

Consideremos ahora todas las tareas que tienen como destino al nodo final. Éstas son las tareas 6-8; 5-8 y 7-8.

Si nos preguntamos cuál es la fecha en que a más tardar debemos comenzar tales tareas para no perturbar la fecha tardía del nodo final, resultarán fácilmente los siguientes valores:

20 para la 6-8, pues  $20 + 1 = 21$

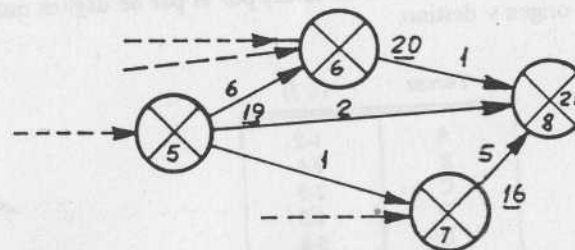
19 para la 5-8, pues  $19 + 2 = 21$

y 16 para la 7-8, pues  $16 + 5 = 21$

puede verse que tales valores están dados por la diferencia entre la fecha tardía del acontecimiento final y las respectivas duraciones, o sea:

$$t_8^1 = D_{ij}$$

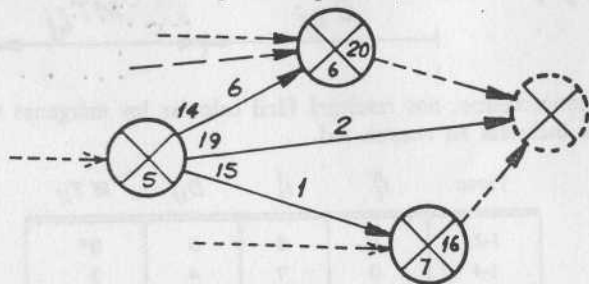
Estos valores los ubicaremos en las colas de las flechas representativas de las tareas. Así obtendremos:



Como el acontecimiento 6 es origen de la tarea 6-8 únicamente, y ésta a más tardar debe comenzar en fecha 20, resulta claro que la fecha tardía del nodo 6 debe ser 20, o sea  $t_6^1 = 20$ .

El nodo 5 aún no podemos considerarlo por cuanto es origen también de la 5-6 y de la 5-7 cuyos comienzos tardíos (valores de cola) todavía no hemos determinado.

En cambio al nodo 7 sí lo podemos poner  $t_7^1 = 16$ .



Ahora podemos determinar los comienzos tardíos de las tareas 5-6 y 5-7. En efecto éstos serán respectivamente:

$$t_6^1 - D_{56} = 20 - 6 = 14$$

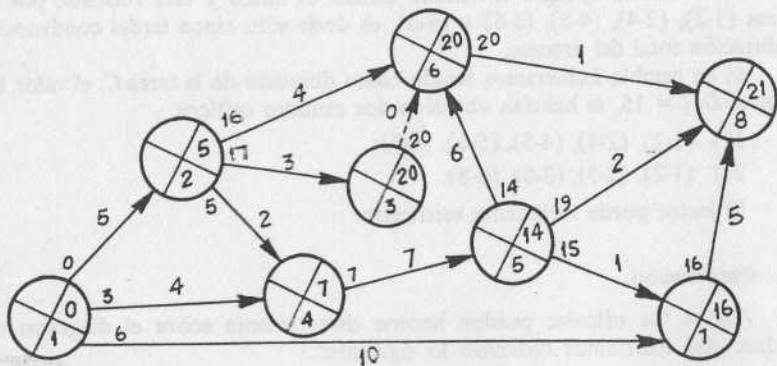
$$t_7^1 - D_{57} = 16 - 1 = 15$$

Es evidente que para poder comenzar las tareas que se inician en el nodo 5, éste debe producirse a más tardar en fecha 14, que es la menor de los comienzos tardíos de las tareas que en él se inician.

Luego:

$$t_5^1 = 14$$

Repitiendo el proceso obtendremos las fechas tardías ( $t_j^1$ ) de los restantes nodos. Los cálculos quedarían indicados en la red, del modo siguiente:



La fecha tardía del acontecimiento inicial debe necesariamente ser igual a su fecha temprana. Es decir:

$$t_1^1 = t_1^0 = 0$$

Éste es el primer elemento de verificación del cálculo efectuado.

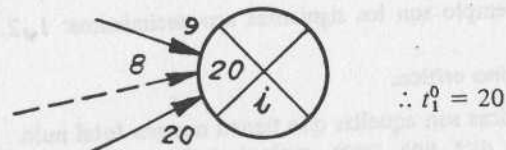
En consecuencia, podemos ya tabular las fechas tempranas y tardías de cada acontecimiento.

| $i$ | $t_i^0$ | $t_i^1$ |
|-----|---------|---------|
| 1   | 0       | 0       |
| 2   | 5       | 5       |
| 3   | 8       | 20      |
| 4   | 7       | 7       |
| 5   | 14      | 14      |
| 6   | 20      | 20      |
| 7   | 15      | 16      |
| 8   | 21      | 21      |

### 13. Reglas prácticas para el cálculo de los $t^0$ y $t^1$

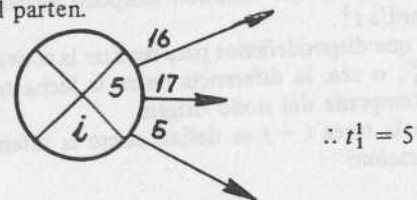
La fecha temprana de un acontecimiento queda determinada por el mayor valor de punta de las flechas que en él tienen su destino.

Ejemplo:



La fecha tardía de un modo está dada por el menor valor de cola de las flechas que de él parten.

Ejemplo:



Simbólicamente: Si definimos con  $U_j^-$  al conjunto de arcos incidentes sobre el nodo  $j$ .

$$t_1^0 = 0$$

$$t_j^0 = \max_k (t_k^0 + D_{ki}) \quad \forall (k, i) \in U_j^-$$

Análogamente, representando con  $U_i^+$  al conjunto de arcos que tienen el mismo origen  $i$ :

$$t_i^1 = \min_k (t_k^1 - D_{ik}) \quad \forall (i, k) \in U_i^+$$

siendo:  $t_n^1 = t_n^0$

#### 14. Indicadores de errores.

a) Para el nodo origen debe resultar  $t_1^0 = t_1^1 = 0$

b) Para cualquier nodo debe cumplirse que  $t_i^0 \leq t_i^1$ , puesto que nunca la fecha temprana puede ser mayor que la fecha tardía.

Si cualquiera de esas condiciones no se cumple, será evidentemente por error de cálculo.

Simbólicamente:

$$t_i^0 \leq t_i^1 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

#### 15. Nodos del camino crítico.

Los nodos del camino crítico son aquellos que tienen iguales ambas fechas, tanto la temprana como la tardía.

Simbólicamente:  $i$  será nodo del camino crítico, si  $t_i^0 = t_i^1$ .

Evidentemente que tanto el origen de la red como el nodo final cumplen con esta condición.

En nuestro ejemplo son los siguientes acontecimientos: 1, 2, 4, 5, 6, 8.

#### 16. Tareas del camino crítico.

Las tareas críticas son aquellas que tienen margen total nulo.

Hemos dicho que una tarea cualquiera la simbolizaremos como la actividad  $(i-j)$ .

Ello significa que tiene origen en el acontecimiento  $i$ , y destino en el nodo  $j$ .

Cada nodo tiene un intervalo de variación temporal limitado por su fecha temprana  $t^0$  y su fecha tardía  $t^1$ .

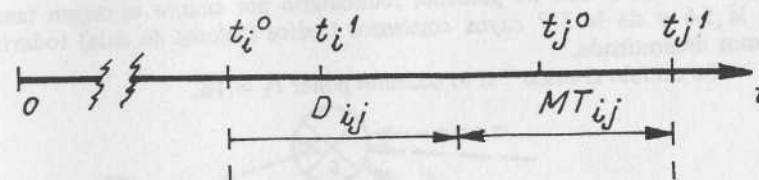
El tiempo máximo que dispondríamos para realizar la actividad  $i-j$  sería, en consecuencia,  $t_j^1 - t_i^0$ , o sea, la diferencia entre la fecha tardía del nodo destino menos la fecha temprana del nodo origen.

El margen total de la tarea  $i-j$  se define como la diferencia entre tal tiempo máximo y su duración.

En símbolos:

$$MT_{ij} = t_j^1 - t_i^0 - D_{ij} = t_j^1 - (t_i^0 + D_{ij})$$

Su interpretación gráfica es la siguiente:



En consecuencia, nos resultará fácil calcular los márgenes totales de las actividades incluidas en nuestra red.

| Tarea | $t_i^0$ | $t_j^1$ | $D_{ij}$ | $MT_{ij}$ |
|-------|---------|---------|----------|-----------|
| 1-2   | 0       | 5       | 5        | 0*        |
| 1-4   | 0       | 7       | 4        | 3         |
| 1-7   | 0       | 16      | 10       | 6         |
| 2-3   | 5       | 20      | 3        | 12        |
| 2-4   | 5       | 7       | 2        | 0*        |
| 2-6   | 5       | 20      | 4        | 11        |
| 3-6   | 8       | 20      | 0        | 12        |
| 4-5   | 7       | 14      | 7        | 0*        |
| 5-6   | 14      | 20      | 6        | 0*        |
| 5-7   | 14      | 16      | 1        | 1         |
| 5-8   | 14      | 21      | 2        | 5         |
| 6-8   | 20      | 21      | 1        | 0*        |
| 7-8   | 15      | 21      | 5        | 1         |

La sucesión de tareas críticas nos da el camino crítico.

Para nuestro ejemplo el camino crítico es único y está formado por las tareas (1-2), (2-4), (4-5), (5-6) y (6-8), es decir sólo cinco tareas condicionan la duración total del proceso.

Si en cambio hubiéramos tenido como duración de la tarea C, el valor 15, o sea si  $D_{23} = 15$ , se habrían obtenido dos caminos críticos.

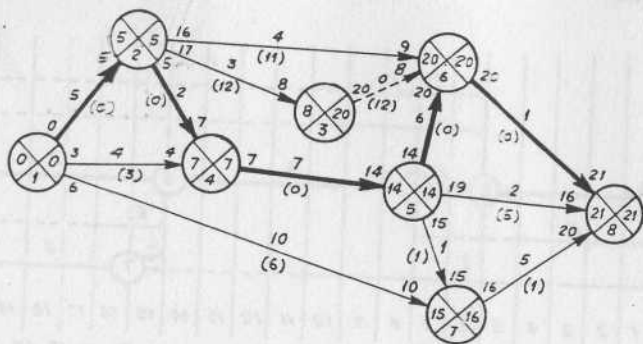
1º) (1-2), (2-4), (4-5), (5-6), (6-8);

2º) (1-2), (2-3), (3-6), (6-8).

El lector puede fácilmente verificarlo.

#### 17. Observación.

Todos los cálculos pueden hacerse directamente sobre el diagrama de flechas. Así habríamos obtenido lo siguiente:



Entre paréntesis hemos indicado los márgenes totales de cada tarea. Reforzando las tareas cuyo margen total es nulo, visualizamos el camino crítico\*.

#### 18. Error frecuente.

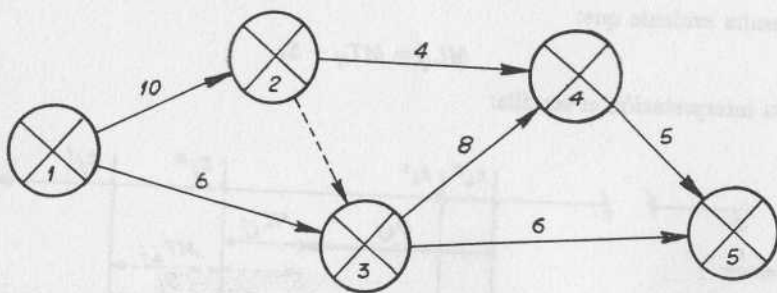
Suele encontrarse en la literatura algunas definiciones que inducen a error.

Así por ejemplo, podría leerse la siguiente: el camino crítico está determinado por los nodos críticos.

Es decir no hace mención al margen total de las tareas.

Si bien es cierto que las tareas críticas vinculan siempre nodos críticos, lo recíproco no es cierto. O sea, las tareas que vinculan nodos críticos no necesariamente son críticas.

Así en el ejemplo siguiente:



\* Cuando se procede al cálculo manual de redes más complejas, hemos encontrado muy conveniente efectuar todos los cálculos sobre un "transparente" superpuesto a la red. Además hemos visto la conveniencia de utilizar colores diferentes para las cuentas ascendentes y descendentes para indicar los márgenes calculados.

el lector encontrará que todos los nodos son críticos, pero que el camino crítico está formado solamente por las siguientes cuatro tareas: (1-2), (2-3), (3-4) y (4-5).

Recordemos una vez más:

El camino crítico está formado por la sucesión de tareas de margen total nulo.

## II. PROGRAMACION

### 19. Concepto.

El programa surge del plan, cuando a éste se le aplica un marco temporal.

Con el análisis de la red de planeamiento (diagrama de flechas) hemos obtenido el *tiempo mínimo* necesario para concretar el proyecto.

Para efectuar la red anterior habíamos dividido el trabajo total en tareas elementales, que analizamos individualmente. Es decir, conocíamos las respuestas a:

¿Qué ... hacer?

¿Quién ... la hace?

¿Cuánto tiempo llevará (probablemente) realizarla?

¿Cómo hacerlo?

No conocíamos cuándo debía hacerse. Sólo sabíamos que una tarea elemental debe hacerse ... "antes de" ... y ... "después de" ... otra tarea.

El análisis de la red de planeamiento, al permitirnos determinar las fechas de los nodos, nos ha permitido mejorar la respuesta.

Ahora podemos decir: no antes de tal fecha, ni después de tal otra.

El proceso de programación hará aún más. Le dará una fecha de iniciación y otra de finalización. En consecuencia se podrán ubicar claramente en un diagrama temporal que nos servirá, en fase operativa, como elemento de control.

### 20. Slacks de los nodos.

Hemos visto que salvo los nodos del camino crítico (rígidos), los acontecimientos tienen dos fechas (una temprana y otra tardía) de valores diferentes.

Es decir, un acontecimiento genérico estará representado por el nodo  $i$  caracterizado por dos valores  $t_i^0$  y  $t_i^1$ . Por lo tanto, probablemente ocurrirá en el intervalo  $t_i^1 - t_i^0$ , denominado *slack* del nodo  $i$ .

Para ubicarlos en un diagrama temporal debemos tomar algún valor de dicho intervalo.

O sea, si representamos con  $\theta_i$  a la fecha programada del acontecimiento  $i$ , resultará:

$$t_i^0 \leq \theta_i \leq t_i^1$$

Si utilizamos el extremo tardío  $t_i^1$ , una demora en su ocurrencia será "tardíamente" detectada y las acciones a tomar serán tardías también y de eficacia dudosa.

Nuestra acción no será más que un paliativo de las demoras que se propagarán, como perturbaciones, al resto de la red.

Si tomamos el valor más temprano  $t_i^0$ , cualquier demora en su producción nos permitirá accionar para reducir la influencia de la perturbación, es decir, adoptar una acción correctora eficaz.

Luego tomaremos las fechas tempranas de cada acontecimiento para ubicarlos en el calendario, o sea:

$$t_i = t_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, n$$

## 21. Confección del programa.

Es aconsejable ubicar primeramente el camino (o caminos) crítico que no admitiendo "ningún juego" se dispondrá rígidamente en el tiempo.

Luego se ubicarán los nodos no críticos (slacks no nulos) tratando de que permitan un trazado cómodo de las tareas que los vinculen.

El programa resultante será nuestro programa de partida. A él le imponemos las restricciones dadas por las disponibilidades de recursos y, si alguna no se cumple, lo modificaremos hasta ver si son satisfechas todas, o sea, trataremos de verificar su factibilidad.

## 22. Reglas a observar.

- 1) La longitud de las flechas es igual a su duración.
- 2) Los espacios entre nodos vinculados por la tarea se marcan con flecha llena, de longitud igual a la duración de aquella.

El espacio remanente con una flecha de trazos (no es necesariamente una tarea ficticia). Esta flecha de trazos visualiza el orden lógico de realización, marca las interdependencias.

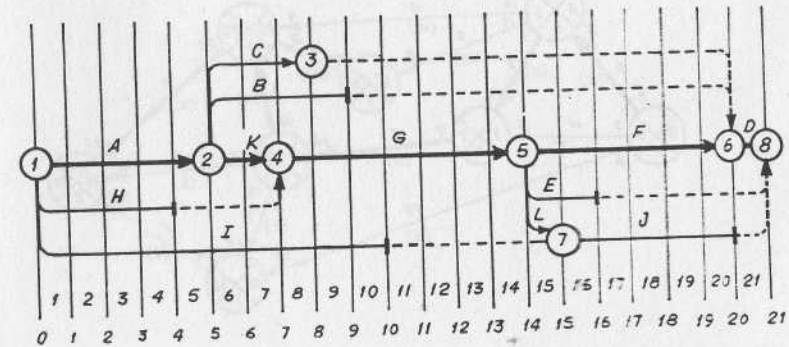
## 23. Reglas convenientes de observar.

- 1) Las flechas deben dibujarse (las llenas y las de trazo) horizontalmente.
- 2) Cortar la punta de las flechas con un trozo vertical. De ese modo resultará perfectamente visible la fecha de finalización de la tarea en cuestión.
- 3) Como los nodos vinculados por una tarea no estarán siempre situados sobre una misma horizontal, es conveniente continuar la flecha (llena o de trazos) siguiendo la vertical que pasa por el acontecimiento destino (o iniciarla siguiendo la vertical del origen).

## 24. Aplicación.

De acuerdo con todo lo anteriormente expuesto será fácil para el lector dibujar el programa inicial resultante para el ejemplo que se viene

analizando. Hemos incluido, a título de referencia, el diagrama correspondiente:



Aquí corresponde hacer la siguiente aclaración. Como hemos elegido las fechas tempranas, el espacio que nos queda en el diagrama luego de ubicar la duración  $D_{ij}$  no será el M.T. sino otro margen que se denomina libre, definido por:

$$M.L._{ij} = t_j^0 - t_i^0 - D_{ij} = t_j^0 - (t_i^0 + D_{ij})$$

Así, por ejemplo:

$$M.L._{17} = 15 - 0 - 10 = 5$$

$$M.L._{78} = 21 - 15 - 5 = 1$$

$$M.L._{57} = 15 - 14 - 1 = 0$$

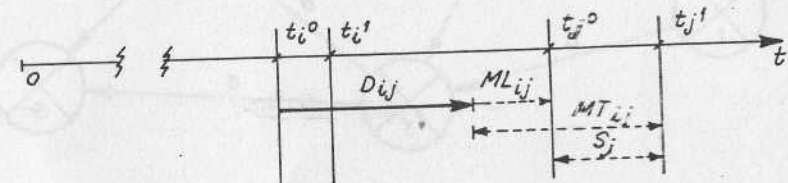
Si recordamos que  $M.T._{ij} = t_j^1 - (t_i^0 + D_{ij})$  y que:

$$S_j = t_j^1 - t_j^0$$

resulta evidente que:

$$M.L._{ij} = M.T._{ij} - S_j$$

Su interpretación es sencilla:



Sobre el M.L. hablaremos más adelante, al tratar sobre la importancia de los márgenes de las tareas en el análisis de alternativas. (Ver Anexo 1).

## 25. Resumen

El programa se obtiene deformando la red de planeamiento sobre un marco temporal.

El diagrama resultante es de aspecto similar al tradicional diagrama de Gantt, pero lo mejora por cuanto están claramente indicadas todas las interdependencias entre tareas.

Este programa nos dice cuándo debemos comenzar cada tarea y, por lo tanto, en qué momento debemos disponer de los recursos necesarios. Si se trataran de recursos aún no disponibles podríamos establecer el plan de abastecimientos.

Si este programa es factible podemos ponerlo en operación.

El programa nos dice entonces cuáles son las tareas que período a período deben preocupar nuestra atención, pero también, con qué intensidad debemos preocuparnos.

Así, y refiriéndonos al programa antes dibujado, durante el 8° período, por ejemplo, además de la tarea crítica *G*, nos interesan solamente las tareas *C*, *B* e *I*. Resulta claro que tanto *C* como *B* no nos debe preocupar tanto como la *I*: las primeras tienen un margen libre 4 y 3 veces mayor que su duración estimada mientras que el margen de *I* es de un 50% de su duración.

Así también, podemos observar que durante la última parte del proceso una demora de 1 en la tarea *E* no tendría gran importancia. En cambio esa misma demora en la realización de *L* o de *J* convertiría al camino parcial (5-7), (7-8) también en crítico. Al mismo tiempo una demora de 2 ya no sería tolerada por *L* o por *J*, o por la suma de ambas duraciones; en cambio sobre *E* no significaría ninguna perturbación sobre la fecha estimada de finalización del proyecto.

## 26. Factibilidad.

Al estudiar cada tarea elemental se conocieron los recursos necesarios, cualitativamente y cuantitativamente.

Al efectuar la programación sabemos en qué momento preciso esa necesidad se manifiesta.

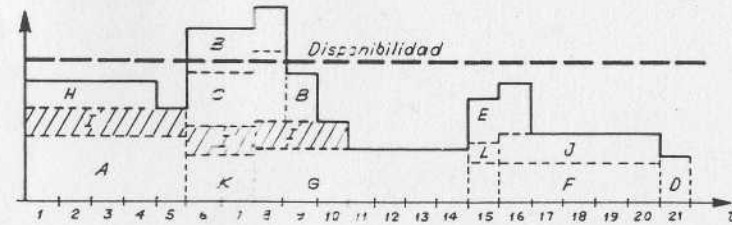
Podemos entonces calcular, período a período, la necesidad total de cada tipo de recurso y compararlo con la disponibilidad prevista.

Siempre que las disponibilidades iguallen o superen a las necesidades calculadas, el programa será factible.

No es suficiente que hagamos el plan de un proyecto, calculemos el camino crítico, confeccionemos un programa, si para ponerlo en operación necesitaremos disponibilidades que no tenemos, ni vislumbramos tener.

Así, por ejemplo, veamos la "carga necesaria" de recursos financieros. En el gráfico siguiente indicaremos las necesidades parciales de cada tarea, y la resultante total: los valores son supuestos.

Si el gráfico tuviera el aspecto indicado nos veríamos en la necesidad de estudiar los períodos 6, 7 y 8 pues en ellos la disponibilidad es superada.



Una solución que se nos presenta sería desplazar, por ejemplo, la tarea *C* hacia los períodos 11, 12 y 13.

Evidentemente este cálculo debe hacerse para cada clase de recursos; no obstante la mayoría de las veces bastará hacerla para los recursos que aparezcan como "más escasos".

Supuesto que el programa inicial, o alguno de los reformados, satisfaga las condiciones de factibilidad, se convertirá en un programa factible y por lo tanto podrá entrar en la etapa de ejecución.

## III. CONTROL

### 27. Concepto.

Una vez definido el programa a realizar, pasamos a la etapa de ejecución.

Dado que los factores que condicionan el proyecto (humanos, financieros, materiales, etc.) son muy numerosos, es posible que a medida que se vayan desarrollando las operaciones, aquellas sufran modificaciones sensibles.

Recordamos que el proyecto está caracterizado por un *objetivo* que debe alcanzarse en el futuro.

Luego es necesario efectuar un seguimiento de la realización con el objeto de comprobar si la realidad confirma o niega las previsiones.

Pero el seguimiento que nos permitirá constatar las modificaciones con respecto a las previsiones no es para darnos solamente un conocimiento de adelantos y/o atrasos. Debe por el contrario servirnos para accionar, la mayoría de las veces, a fin de orientar el desarrollo de los trabajos.

Así la detección de tales perturbaciones nos indicará la conveniencia de desplazar recursos, por ejemplo, de las operaciones que están avanzadas hacia las que están retrasando y poniendo en peligro la consecución del objetivo.

Así, por ejemplo, la presencia de huelgas puede llevar a la necesidad de realizar trabajos con horas extras a fin de recuperar el tiempo perdido; así las variaciones en los precios de los materiales, o reajustes financieros.

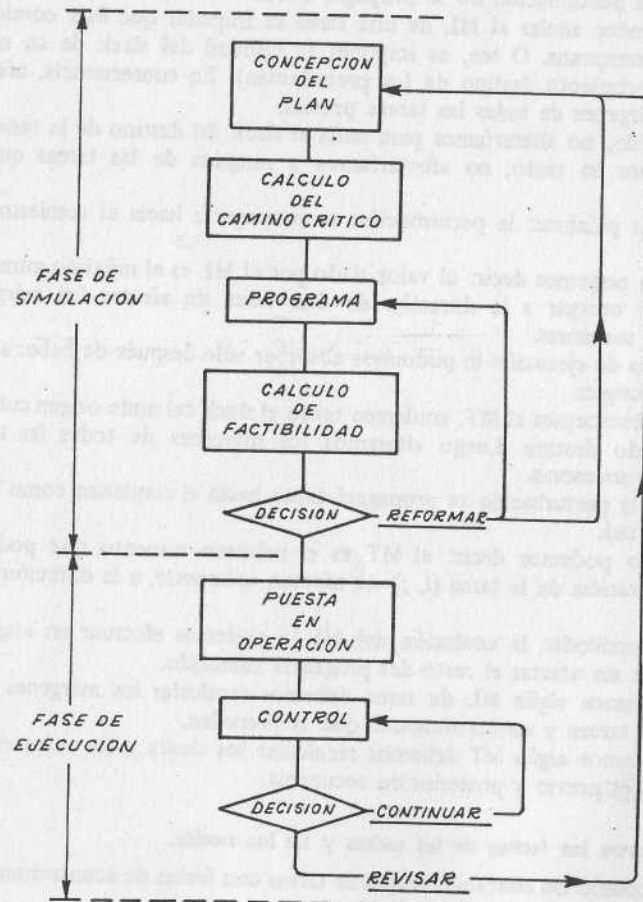
Cuando realmente se produzcan desvíos importantes con respecto a lo previsto es probable que debamos revisar el proyecto. Es cierto que a esta altura del proceso, existirán ya parte de actividades realizadas y se conocerán las modificaciones ocurridas.

Dado que parte de las tareas están realizadas, la nueva definición del proyecto se ha de referir a sólo la parte restante y por lo tanto involucrará, generalmente, un período más corto.

Con respecto a la frecuencia con que debemos efectuar un control de avance del proceso, no existen reglas fijas. La experiencia indica que la frecuencia de las inspecciones debe acentuarse a medida que nos aproximamos al acontecimiento final.

### RESUMEN DEL PROCESO

28. Las etapas hasta ahora vistas podemos representarlas mediante el siguiente diagrama:



### ANEXO 1

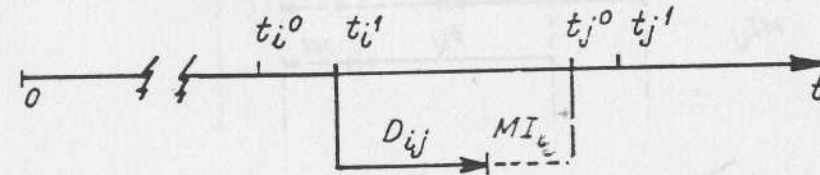
### MARGENES Y SLACKS

Ya conocemos las definiciones de margen total (MT) y de margen libre (ML).

Existe un tercer margen denominado independiente que se define simbólicamente por:

$$M.I._{ij} = t_j^0 - t_i^1 - D_{ij} = t_j^0 - (t_i^1 + D_{ij})$$

Su interpretación gráfica es:



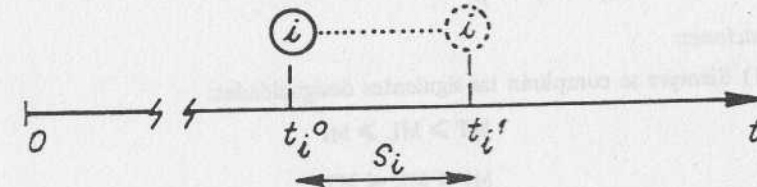
#### Slacks.

El slack de nodo  $i$  es el margen que posee el acontecimiento  $i$ . Podemos interpretarlo como el intervalo en el cual puede "moverse", o donde dicho suceso puede producirse.

Lo simbolizaremos con  $S_i$  y estará definido por la igualdad siguiente:

$$S_i = t_i^1 - t_i^0$$

cuya interpretación gráfica es:



Si bien es un margen, usaremos la denominación de slack a los efectos de facilitar la distinción con los márgenes de las tareas.

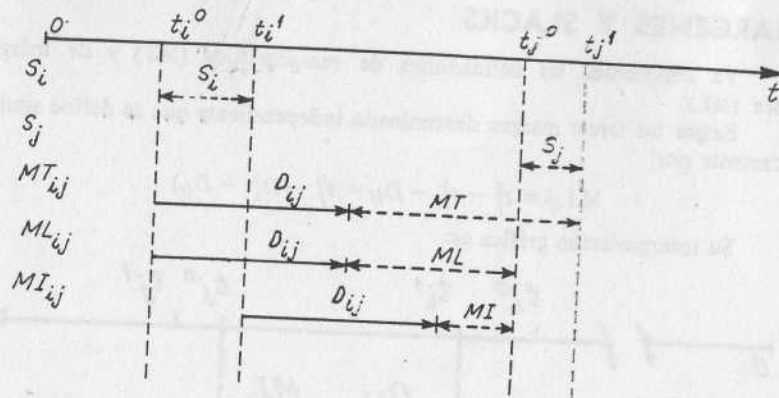
Resumiendo:

- 1) Utilizaremos márgenes (MT, ML, MI), para las tareas.
- 2) Utilizaremos el término slack (S), para los nodos.

#### Expresiones simbólicas para márgenes de tareas y slack de nodos.

Con los conceptos expuestos podemos definirlos nuevamente en forma simbólica.

Para entenderlos haremos primeramente sus representaciones gráficas.



Observando el esquema resulta muy fácil deducir las siguientes fórmulas:

a)  $MT_{ij} = t_j^1 - (t_i^0 + D_{ij})$

b)  $ML_{ij} = t_j^0 - (t_i^0 + D_{ij})$   
 $= MT_{ij} - S_j$

c)  $MI_{ij} = t_j^0 - (t_i^1 + D_{ij})$   
 $= ML_{ij} - S_i$   
 $= MT_{ij} - (S_i + S_j)$

Observaciones:

1) Siempre se cumplirán las siguientes desigualdades:

o sea:  $MT \geq ML \geq MI$

$MI \leq ML \leq MT$

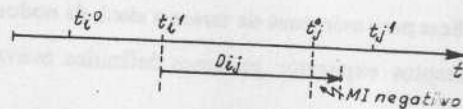
2) Puede suceder que

$t_j^0 - t_i^1 < D_{ij}$

lo que nos daría un  $MI_{ij} < 0$  (negativo).

Los valores negativos de los MI los consideramos nulos salvo mención en contrario.

Gráficamente:



## Utilidad de los márgenes.

Si durante la simulación, y al considerar el programa obtenido, resultara conveniente reducir los recursos asignados a una tarea  $(i, j)$  permitiéndole aumentar su duración, se alterarán en general todos los márgenes de las actividades precedentes y sucesoras, con las siguientes excepciones:

1) Si aumentamos la duración de  $(i, j)$  hasta un valor tal que  $MI_{ij} = 0$ , no se modificarán los slacks (ni siquiera el de  $i$  ni el de  $j$ ) ni los márgenes de ninguna tarea previa ni posterior. Sólo se modificarán los márgenes de la tarea  $(i, j)$ .

Esto último puede visualizarse sobre el esquema de slacks y márgenes.

En consecuencia podemos decir que: el MI es el máximo aumento en la duración de  $(i, j)$  que podemos permitir sin afectar a ninguna otra, ni anterior, ni posterior.

O sea: la perturbación no se propaga; queda localizada en la tarea  $(i, j)$ .

2) Pretender anular al ML de una tarea es imponer que ésta comience en su fecha temprana. O sea, es imponer la nulidad del slack de su nodo origen (acontecimiento destino de las precedentes). En consecuencia, afectaríamos los márgenes de todas las tareas previas.

En cambio, no alteraríamos para nada el slack del destino de la tarea en cuestión y, por lo tanto, no afectaríamos a ninguna de las tareas que le suceden.

En otras palabras: la perturbación se propagaría hacia el comienzo de la red.

Por ello podemos decir: el valor dado por el ML es el máximo aumento que podemos otorgar a la duración de una tarea sin afectar los márgenes de las tareas sucesoras.

En etapa de ejecución lo podremos absorber sólo después de haber alcanzado el nodo origen.

3) Si absorbemos el MT, anulamos tanto el slack del nodo origen como el slack del nodo destino. Luego alteramos los márgenes de todas las tareas precedentes y sucesoras.

O sea: la perturbación se propagará tanto hacia el comienzo como hacia el final de la red.

Por ello podemos decir: el MT es el máximo aumento que podemos darle a la duración de la tarea  $(i, j)$  sin afectar, *solamente*, a la duración total de proyecto.

4) Resumiendo: la anulación del MI lo podemos efectuar en etapa de programación sin afectar el resto del programa calculado.

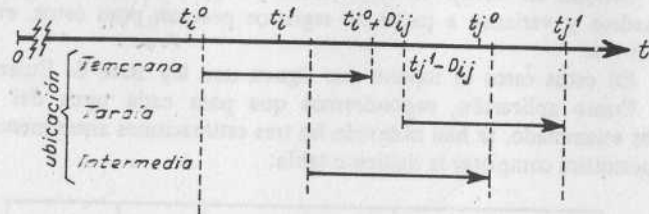
Si anulamos algún ML de tarea debemos recalcular los márgenes y los slacks de las tareas y acontecimientos que la preceden.

Si anulamos algún MT debemos recalcular los slacks y los márgenes de todo lo que es previo y posterior en secuencia.

## Diferencia entre las fechas de las tareas y de los nodos.

Es necesario no confundir fechas de tareas con fechas de acontecimientos aún cuando algunas de ellas tengan igual valor.

A los efectos de visualizar bien su diferencia, haremos el siguiente diagrama, de una tarea  $i-j$  cualquiera.



Recordamos que en el diagrama temporal la posición de la cola de la flecha nos da la fecha de comienzo, y la de la punta nos visualiza la fecha de finalización. Vemos que el comienzo tiene dos posiciones extremas:

—comienzo temprano =  $t_i^0$  (coincidente con la fecha temprana del nodo origen).

—comienzo tardío =  $t_i^1 - D_{ij}$

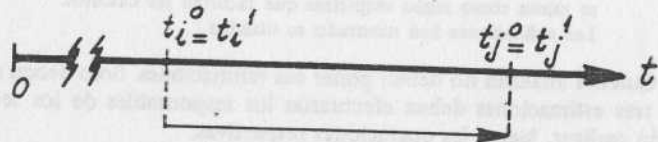
Análogamente para la finalización tenemos:

—final temprano =  $t_j^0 + D_{ij}$

—final tardío =  $t_j^1$  (coincidente con la fecha tardía del nodo destino).

Evidentemente que tanto el comienzo como el final pueden ocupar infinitas posiciones intermedias, según es observable en el diagrama anterior.

Puede verse fácilmente que para una tarea de  $MT = 0$  no existe tal flexibilidad; su ubicación temporal está rígidamente determinada. Dicha situación está representada gráficamente en el diagrama siguiente:



#### Conclusión:

Al estudiar cada tarea, debemos distinguir los siguientes conceptos.

| Tarea | Nodo origen |              | Nodo destino |              | Duración | Márgenes                   |                            |                            | Comienzo |                  | Finalización     |         |
|-------|-------------|--------------|--------------|--------------|----------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|----------|------------------|------------------|---------|
|       | Fecha temp. | Fecha tardía | Fecha temp.  | Fecha tardía |          | Total                      | Libre                      | Independiente              | Temp.    | Tardía           | Temp.            | Tardía  |
| $i-j$ | $t_i^0$     | $t_i^1$      | $t_j^0$      | $t_j^1$      | $D_{ij}$ | $t_j^0 - (t_i^0 + D_{ij})$ | $t_j^1 - (t_i^1 + D_{ij})$ | $t_j^0 - (t_i^1 + D_{ij})$ | $t_i^0$  | $t_i^1 - D_{ij}$ | $t_j^0 + D_{ij}$ | $t_j^1$ |
| 1-2   | 0           | 0            | 5            | 5            | 5        | 1                          | 0                          | 0                          | 0        | 0                | 5                | 5       |
| 1-15  | 0           | 0            | 15           | 16           | 10       | 1                          | 5                          | 5                          | 0        | 6                | 10*              | 16      |
| 7-8   | 15          | 16           | 21           | 21           | 5        | 1                          | 1                          | 0                          | 15       | 16               | 20               | 21      |

Hemos tomado, a título ilustrativo, 3 tareas del ejemplo resuelto.

## ANEXO 2

### DURACION DE LAS TAREAS: SU ESTIMACION

Hemos visto que el proceso examinado partía de la concepción del plan, y que para ello, era necesario conocer la lista de tareas.

Entonces hicimos notar el rol de la escala en la presentación del fenómeno, argumentando que la definición del conjunto de tareas dependía del nivel de penetración adoptado.

De ese modo definíamos las tareas elementales. Examinando luego a cada una de ellas como una totalidad, podíamos establecer sus interdependencias y estimar el tiempo necesario para realizarlas, es decir, estimar sus duraciones. Es con respecto a esto último que conviene hacer algunas consideraciones.

En el ejemplo que se resolvió, supusimos que podíamos conocer las duraciones como un número cierto, o sea, sin incertidumbre asociada. Pero esta suposición es demasiado simplista. Ello podría ser aproximadamente cierto en los procesos en serie. Sabemos que existen muchos métodos para calcular tiempos en aquellas operaciones constituyentes de procesos seriados. El ahorro alcanzado en una operación elemental, por pequeño que fuera aparentemente, tiene gran significado económico precisamente por su condición de repetitiva. En cambio, a nadie extraña (y aún hoy) que un proyecto nuevo se realice insumiendo un tiempo de ejecución muy superior al estimado.

Todo plan se refiere al futuro, y por lo tanto reviste el carácter de aleatorio.

Como la certeza sólo se refiere al pasado y las duraciones que las tareas insumirán son datos que utilizaremos en nuestra "penetración" del futuro, ... hoy sólo se podrán "estimar".

Pretender conocer las duraciones de las operaciones futuras con certeza es un absurdo; sólo las podemos conocer probablemente: sólo podemos estimarlas; los tiempos "ciertos" serían aquéllos que no tienen incertidumbre asociada.

Cuando se traten de operaciones conocidas, nuestra estimación podrá realizarse a partir de registros previos, estudiando la distribución estadística de sus duraciones.

Aún en estos casos, la duración puede desviarse fuertemente de su valor promedio. Por ejemplo, la recorrida de rutina de un motor puede llegar a insumir un tiempo mucho mayor que el acostumbrado porque durante una recorrida particular se pueden descubrir fallas serias en él.

Además se ha dicho que "la tarea tiene el hábito de estirarse" a fin de utilizar todo el tiempo disponible. Por ello se aconseja examinar el contenido real de trabajo más que verificar solamente el tiempo insumido.

Pero aún más: de las tareas que constituyen el problema en examen, no siempre disponemos de registros anteriores.

Así, el diseño, el lanzamiento de un nuevo producto, el estudiar e implementar las modificaciones de un nuevo producto, o la instalación de nuevos sistemas y procedimientos, etc., contendrán muchas operaciones totalmente nuevas, es decir, de las que no disponemos ninguna experiencia, de las que ignoramos sus distribuciones.

Si esto ya es evidente aún para aquellas operaciones que conocemos por haberlas utilizado, es mucho más evidente para aquellas que son nuevas. Tanto más para las tareas de un proceso de investigación.

Precisamente, el análisis de redes se aplica especialmente a las operaciones nuevas, a las no experimentadas, etc., es decir, a todas aquellas cuyo conocimiento es generalmente pobre, aquellas que están rodeadas de gran incertidumbre.

Nuestro objetivo será apreciar cuál será el tiempo que probablemente será necesario para efectuarla, utilizando recursos, ritmos normales, las modalidades propias de los organismos que deben ejecutarla. Es decir, obtener alguna idea sobre la distribución de los tiempos de duración.

Generalmente podemos disponer de tres estimaciones. Una, la más probable, ( $t_m$ )

También una apreciación optimista, ( $t_o$ ), si todo se realizara sin ningún inconveniente. Y otra estimación pesimista, ( $t_p$ ), suponiendo que todos los factores adversos se presentaran.

Para cada tarea, el analista debe formular tres preguntas del siguiente tipo:

¿Cuál es, a su juicio, la duración más probable de la tarea?

¿Cuál la duración mínima, si todos los factores se dispusieran favorablemente?

¿Cuál sería la máxima duración, si las cosas se presentaran desfavorablemente?

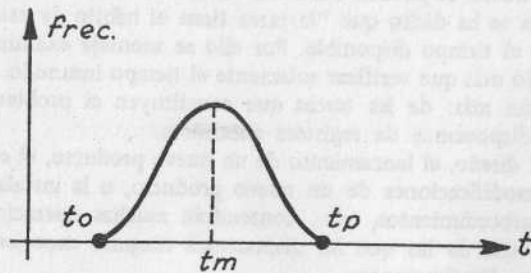
El análisis de la red utilizando los tiempos probabilísticos, conocidos como las técnicas P.E.R.T., hace uso de estas tres estimaciones, definiendo y utilizando el tiempo esperado  $t_e$  y su varianza  $\sigma_{t_e}^2$ , donde:

$$t_e = \frac{t_o + 4t_m + t_p}{6}$$

$$\sigma_{t_e}^2 = \left( \frac{t_p - t_o}{6} \right)^2$$

Puede observarse que el tiempo esperado no es el promedio aritmético de las tres estimaciones. Es un promedio ponderado donde el tiempo más probable "pesa" 2/3, siendo el tercio restante la semisuma de los extremos.

Tales cálculos se basan en ciertas suposiciones sobre la naturaleza de la distribución. Se acepta que tendrá la forma de ley beta que es parecida a la de Laplace-Gauss, pero acotada a derecha e izquierda.



Resumiendo: los tiempos operativos seguirán una ley de distribución que puede ser conocida o no.

Cuando un trabajo se va a realizar por primera vez, es imposible calcular promedios y varianza a partir de registros previos, pues éstos, evidentemente, no existen.

En estos casos se supone que siguen una ley Beta de Euler.

Como aplicación, supondremos que para cada tarea del ejemplo que hemos examinado, se han obtenido las tres estimaciones antes mencionadas; ello nos permitirá completar la siguiente tabla:

| Tarea | $t_o$ | $t_m$ | $t_p$ | $t_e$ | $\sigma_{t_e}$ |
|-------|-------|-------|-------|-------|----------------|
| A     | 2     | 5,5   | 6     | 5     | 0,67           |
| B     | 1     | 4,5   | 5     | 4     | 0,67           |
| C     | 2     | 2,5   | 6     | 3     | 0,67           |
| D     | 0,5   | 1     | 1,5   | 1     | 0,17           |
| E     | 2     | 1,5   | 4     | 2     | 0,33           |
| E     | 0,5   | 7     | 7,5   | 6     | 1,17           |
| G     | 5     | 6     | 13    | 7     | 1,33           |
| H     | 3     | 4     | 5     | 4     | 0,33           |
| I     | 8     | 9     | 16    | 10    | 1,33           |
| J     | 3     | 4,5   | 9     | 5     | 1,00           |
| K     | 1     | 1,5   | 5     | 2     | 0,67           |
| L     | 0,5   | 1     | 1,5   | 1     | 0,17           |

Nota: Se ha sugerido que las estimaciones de  $t_e$  y de  $\sigma_{t_e}$  se miren como reglas empíricas que facilitan los cálculos. Las aplicaciones han mostrado su utilidad.

Quienes analizan no deben poner sus estimaciones. Sólo deben motivarlas. Estas tres estimaciones deben efectuarlas los responsables de los sectores que deberán realizar, luego, las operaciones respectivas.

Es necesario también que se enfatice suficientemente que la "estimación de un tiempo", no significa un compromiso por parte del estimador que posteriormente pueda traducirse en una recompensa o en un castigo, sino que por el contrario, efectuarla de acuerdo con su leal saber y entender, contribuirá eficazmente al logro de la mejor coordinación de los esfuerzos de toda la organización.

### ANEXO 3

#### PROBABILIDAD ASOCIADA A LAS FECHAS PROGRAMADAS

Con la introducción de las tres estimaciones (Anexo 2), pudimos determinar el tiempo esperado  $t_e$ , es decir, la duración estimada de cada tarea. En conocimiento de estos datos podemos aplicar íntegramente el proceso ya

descripto. Así, en base a los  $t_e$  podemos determinar las fechas tempranas de cada acontecimiento que, con mayor rigor, deberemos denominarlas "fechas tempranas esperadas".

A esta altura del desarrollo podemos decir que el P.E.R.T. se refiere a la técnica que trata con la incertidumbre de los tiempos de duración.

El reconocimiento de que los tiempos de duración son distribuciones en probabilidad, nos permite penetrar algo más en la intimidad del proceso.

El problema que primero nos ocupará, será la determinación de cuál es la probabilidad de que el acontecimiento  $j$  se alcance en la fecha  $\theta_j$ .

Para ello haremos uso del "Teorema Central del límite" que establece:

Dada una serie de variables aleatorias  $X_1, \dots, X_n$  cuyas varianzas son  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2$ ; si sus variancias son finitas, si su suma crece con  $n$ , pero de forma tal que el cociente:

$$\frac{\sigma_i^2}{\sum \sigma_i^2} \rightarrow 0 \quad \text{para } n \rightarrow \infty$$

la variable  $\zeta_n = \frac{Z_n - E(Z_n)}{\sigma_{Z_n}}$  donde  $Z_n = \sum E(X_i)$

sigue en el límite, una ley normal reducida, sean cuales sean las distribuciones de las  $X_i$ .

Cuando las variables  $X_i$  siguen leyes beta, se puede hacer uso del T.C.L. aún con un reducido número de variables.

Sintéticamente, podríamos decir:

Cuando el número de variables aleatorias independientes es suficientemente grande, su suma sigue una ley normal cualesquiera sean las distribuciones de cada una.

La variable aleatoria suma tendrá una esperanza igual a la suma de las esperanzas, y una variancia igual a la suma de las variancias de cada variable sumando.

La probabilidad relacionada con una fecha programada  $\theta_j$ , se calcula mediante la variable reducida.

$$Z_j = \frac{\theta_j - t_j^0}{\sigma_j}$$

y haciendo uso de las tablas de la distribución normal.

Se ha establecido:

- 1)  $0,4 \leq p(\theta_j) \leq 0,65$  como límite de un riesgo razonable.
- 2) Si  $p(\theta_j) < 0,3$  el peligro de fallar es muy grande y se requiere efectuar una replanificación.
- 3) entre 0,3 y 0,4 se requiere un estudio cuidadoso.
- 4) Si  $p(\theta_j) > 0,65$  los recursos asignados sobre el camino que la define son excesivos y se debe efectuar una replanificación.

donde  $p(\theta_j)$  es la probabilidad de que la fecha de ocurrencia real  $t_j$  del acontecimiento  $j$ , no supere a  $\theta_j$ , es decir,  $p(\theta_j)$  es en realidad  $p(t_j \leq \theta_j)$ .

#### Aplicación.

Recordemos que para el ejemplo tratado, el camino crítico resultante era  $\mu_c = (1, 2, 4, 5, 6, 8)$  cuya duración estaba dada por  $t_8^0 = t_8^1 = 21$ .

En función de las tareas,  $\mu_c = (A, K, G, F, D)$ .

Si tenemos en cuenta que:

| tarea | $t_e$ | $\sigma_{t_e}$ |
|-------|-------|----------------|
| A     | 5     | 0,67           |
| K     | 2     | 0,67           |
| G     | 7     | 1,33           |
| F     | 6     | 1,17           |
| D     | 1     | 0,17           |

$$t_8^0 = 5 + 2 + 7 + 6 + 1 = 21$$

$$\sigma_{t_8^0}^2 = (0,67)^2 + (0,67)^2 + (1,33)^2 + (1,17)^2 + (0,17)^2 = 0,45 + 0,45 + 1,77 + 1,37 + 0,03 = 4,07$$

$$\therefore \sigma_{t_8^0} = 2,01$$

Supongamos ahora que debemos firmar un contrato por el cual nos comprometemos a finalizar los operativos, a concluir el proyecto, antes de una fecha determinada. Sea  $\theta_8$  tal fecha. Es evidente que nos interesará tener una idea de la probabilidad de no superar dicha fecha  $\theta_8$ .

Luego, si con  $\theta_8$  representamos a la fecha programada del acontecimiento final, la variable reducida correspondiente será

$$z_8 = \frac{\theta_8 - t_8^0}{\sigma_{t_8^0}} = \frac{\theta_8 - 21}{2,01}$$

a) Si  $\theta_8 = 21$ , evidentemente:  $z_8 = 0$

y  $p(t_8 \leq 21) = 0,5$

b) Si  $\theta_8 = 18$   $z_8 = \frac{-3}{2,01} = -1,49$

$$p(t_8 \leq 18) = 0,0681$$

es decir: el riesgo de incumplimiento es muy grande.

c) Si  $\theta_8 = 25$   $z_8 = \frac{4}{2,01} = 1,99$

$p(t_8 \leq 25) = 0,9767$  el riesgo de incumplimiento es inferior al 3 %.

d) Si  $18 \leq t_8 \leq 25$

$p(18 \leq t_8 \leq 25) = 0,9767 - 0,0681 = 0,9086$  la probabilidad de ocurrencia fuera del intervalo (18,25) es inferior al 10 %.

e) Si imponemos que  $p(\theta_8) \geq 0,95$ , resulta:  $z_8 = 1,65$

$\theta_8 = 2,01 \cdot 1,65 + 21 = 3,3 + 21 = 24,3$ , es decir, si queremos limitar el riesgo de incumplimiento a un nivel del 5 %, no deberíamos comprometernos a finalizar el proyecto antes de la fecha 24,3; prácticamente 25.

f) Si aceptamos que los límites de un riesgo razonable están dados por

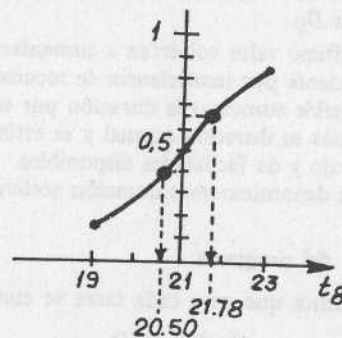
$0,4 \leq p(\theta_j) \leq 0,65$  tendríamos:

para  $p(t_8 \geq \theta_8) = 0,4 \rightarrow x_8 = -0,25$

o sea  $\theta'_8 = -2,01 \times 0,25 + 21 = 20,497 \approx 20,50$

y para  $p(t_8 \leq \theta_8) = 0,65 \rightarrow x''_8 = 0,39$

de donde  $\theta''_8 = 2,01 \times 0,39 + 21 = 21,78$



#### Finalización de tareas.

Para la eficaz administración de los proyectos, conviene expresar los resultados en términos de tareas más que de acontecimientos.

Así, el final temprano esperado de la tarea  $(i, j)$ :  $F_{ij}^0 = t_i^0 + D_{ij}$  con su variancia:

$$\sigma_{F_{ij}^0}^2 = \sigma_i^2 + \sigma_{ij}^2$$

donde:  $\sigma_{ij}$  es la variancia de la duración  $D_{ij}$ .

Si la fecha programada para la tarea  $(i, j)$  es  $\sigma_{ij}$ , la probabilidad de que se realice antes o en la fecha programada, se obtiene computando la variable reducida:

$$z_{ij} = \frac{\theta_{ij} - F_{ij}^0}{\sigma_{F_{ij}^0}}$$

y haciendo uso de las tablas de distribución normal.

#### Síntesis.

Hemos visto cómo puede calcularse la probabilidad de que un acontecimiento se produzca antes de la fecha programada.

Cuanto más cerca de 1 sea su valor, más cerca estaremos de la certeza absoluta. Para ello necesitamos que todas las tareas se desarrollen del modo más favorable.

Asegurarlo es a costa de mayores recursos. En realidad es poner recursos en exceso. O sea, compramos seguridad aumentando el costo.

Por otra parte, si la probabilidad es muy baja, estamos en una situación potencialmente peligrosa: en etapa de ejecución puede llevarnos a tomar acciones correctoras serias y/o continuas replanificaciones.

Entonces debemos llegar a valores de probabilidad que representen una solución de compromiso entre un riesgo razonable y una adecuada utilización de recursos. Se ha establecido el intervalo 0,4 a 0,65 como el adecuado.

#### ANEXO 4

### COSTOS ASOCIADOS

#### Introducción.

Identificado el camino crítico  $\mu_c$ , la duración del proyecto total que en adelante representaremos con  $t_n$  (fecha del enésimo nodo) estará dada por:

$$t_n = \sum_{(i, j) \in \mu_c} t_{ij}$$

La realización de cada tarea  $(i, j)$  se hará a un costo directo  $c_{ij}$ . Por lo tanto, el costo directo del programa, C.D.P., resultará:

$$\text{C.D.P.} = \sum_{(i, j) \in U} c_{ij}$$

Es posible que el responsable de su desarrollo estime que tanto la duración como el costo del proyecto son satisfactorios. En tal caso se habría completado el trabajo de planeamiento.

Sin embargo, puede suceder que la fecha de terminación esperada resulte inapropiada. Así, la disponibilidad de un nuevo producto podría resultar fuera de oportunidad; la disponibilidad de un nuevo sistema de defensa del cual dependa la seguridad de supervivencia de la nación puede hacer que una reducción de  $t_n$  tenga una utilidad "infinita".

No es extraño que en casos parecidos la industria trate de *acelerar todos los trabajos* para lograr reducir dicha duración  $t_n$ .

No obstante, sabemos ya que la reducción de los tiempos de muchas tareas no tienen ninguna implicancia sobre la reducción de  $t_n$ .

La reducción de  $t_n$  se logra reduciendo las tareas del camino crítico. Como generalmente reducir tiempos significa incrementar costos, tratar de acelerar todas las tareas nos llevará a un costo total mayor que el necesario, pues la aceleración de las tareas no críticas será, en general, un gasto inútil: un despilfarro de recursos.

Precisamente aquí vuelve a manifestarse el gran valor del análisis de redes: la acción no la haremos indiscriminadamente sobre todas las tareas, sino que, por el contrario, actuaremos selectivamente.

A continuación daremos algunas ideas conceptuales sobre el valor del tiempo ahorrado, así como del costo del ahorro.

#### Generalidades.

El deseo de reducir  $t_{ij}$  nos llevaría a pensar en las siguientes acciones:

a) Eliminar algunas partes del trabajo, aquéllas que no sean estrictamente necesarias.

Así podríamos reducir algunas operaciones de terminación, quizá en perjuicio de su calidad. Pero esto introduce otro tipo de riesgos adicionales.

b) Durante la definición de las tareas elementales es posible que hayamos despreciado la posibilidad de realizarlas parcialmente en paralelo y que le hayamos impuesto hacerlas totalmente en secuencia.

O sea, es probable que hayamos impuesto una estricta secuenciación entre una serie de tareas que sin embargo permiten cierto grado de solapamiento (de paralelismo en el tiempo).

Para tener en cuenta esta posibilidad debemos replanificar, rehacer diagramas, cálculos, revisar resultados. Esto implica mayores gastos.

c) Aplicar recursos adicionales.

Se ha recalcado que no debe recurrirse al expediente de cambiar las estimaciones de los tiempos operativos con el objeto de acortar un programa, dado que las primeras estimaciones son más confiables, pues las "nuevas estimaciones" se harían frente a la "presión" de aquella necesidad. Su confiabilidad sería menor.

Cuando se desee acortar duraciones habrá que tener presente la premisa siguiente: "El tiempo se debe comprar".

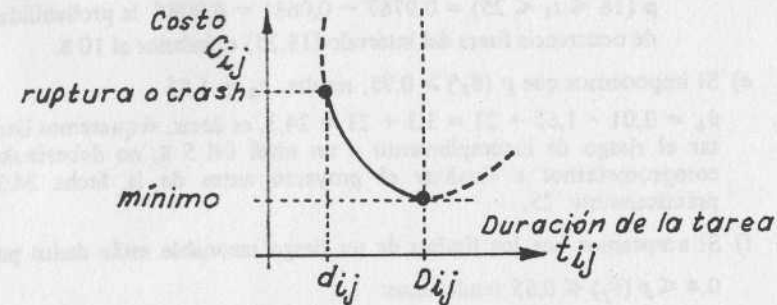
En general, los tiempos operativos  $t_{ij}$  varían en función del costo de la operación y de tal modo que la aceleración de una tarea se traduce en un aumento de costos.

#### Relaciones entre $t_{ij}$ y $c_{ij}$ .

El costo  $c_{ij}$  para realizar una tarea  $(i, j)$  depende del tiempo programado  $t_{ij}$  para efectuarla, de allí que podamos tener diferentes tiempos de realización y por lo tanto costos diferentes.

Suponiendo que mediante un estudio del trabajo hemos eliminado todos los esfuerzos innecesarios, sólo nos quedará atribuir mayores recursos a fin de realizar la tarea en tiempo menor.

Estos recursos (hombres, máquinas, equipos, materiales, etc.), calculados o estimados, pueden reducirse a unidades monetarias. De este modo podríamos construir el siguiente gráfico:



El diagrama contempla las siguientes subposiciones:

1) Que a medida que disminuimos la duración  $t_{ij}$ , el costo de realización aumenta.

2) Que por debajo de  $d_{ij}$  se necesitarían recursos infinitos para producir disminuciones infinitesimales. O sea,  $d_{ij}$  es un límite inferior para las duraciones.

3) Que en sentido inverso, aumentando la duración a partir de  $d_{ij}$ , los costos disminuyen hasta  $D_{ij}$ .

A partir de éste último valor volverían a aumentar. Ello se debería a que el rendimiento es decreciente por insuficiencia de recursos.

Luego no es razonable aumentar la duración por encima de  $D_{ij}$ .

A  $D_{ij}$  la llamaremos su duración normal y se estima en base a las condiciones normales de trabajo y de facilidades disponibles.

En cuanto a  $d_{ij}$  la denominaremos duración acelerada (duración crash).

#### Costo directo esperado del programa

De lo anterior, vemos que para cada tarea se cumple:

$$d_{ij} \leq t_{ij} \leq D_{ij}$$

Si suponemos que todas las tareas se realizan con su duración normal, obtendremos  $t_n = \sum_{(i, j) \in U} D_{ij}$ , valor que denominaremos  $D_n$ , y:

$$C.D.E. = \sum_{(i, j) \in U} c_{ij}$$

nos dará el costo directo mínimo.

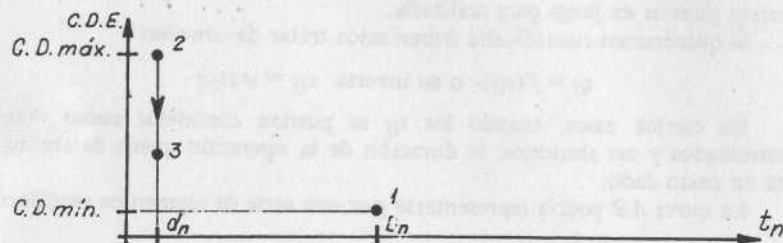
Al programa correspondiente lo llamaremos programa normal.

En cambio, si todas las tareas se realizan con su mínima duración, o sea aceleradas.

$$t_n = d_n = \sum_{(i, j) \in U} d_{ij}$$

pero el costo será máximo.

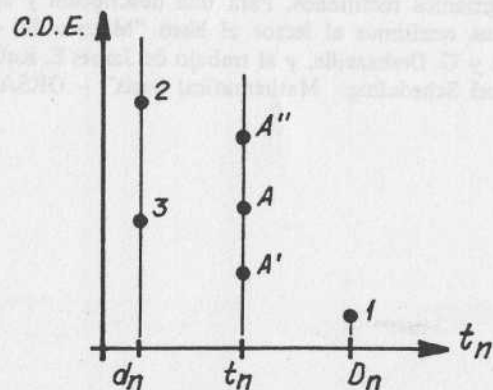
Al programa lo llamaremos programa acelerado.  
Estos valores podríamos representarlos por los puntos 1 y 2, respectivamente, en el diagrama siguiente:



Si, colocándonos en la posición 2 permitimos que las operaciones no críticas aumenten su duración, iremos reduciendo el costo sin aumentar la duración total, que depende, como se ha dicho, de las operaciones críticas.

Convendrá ir alargando aquellas no críticas que permitan mayor reducción. Este proceso lo podremos continuar hasta que hayamos agotado la posibilidad de permitir el alargue de las no críticas. Llega un momento en que aparecerán nuevos caminos críticos y cualquier otra pretensión en la reducción de costos nos llevaría a tener que aumentar la duración de una tarea crítica y por lo tanto modificar a  $d_n$ . En ese momento tendríamos el costo mínimo para la duración acelerada (punto 3).

A menudo existen situaciones donde  $D_n$  es muy largo, pero  $d_n$  es muy costoso para la aplicación práctica. En tal caso nos interesará examinar posiciones intermedias, dentro de la gama de soluciones factibles.



Supongamos ahora que para todas las tareas tenemos:

$$d_{ij} < t_{ij} < D_{ij}$$

En tal caso la duración del proyecto será:

$$d_n < t_n < D_n$$

y el C.D.E. será tal que el punto representativo del estado podría ser A.

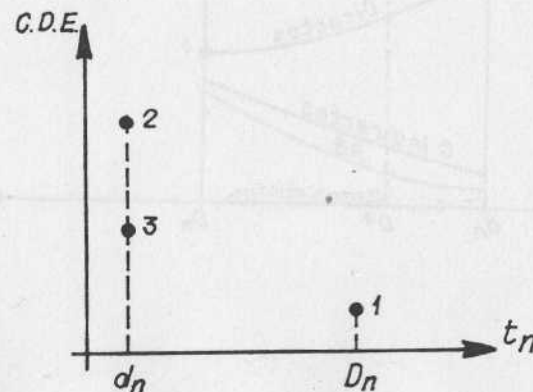
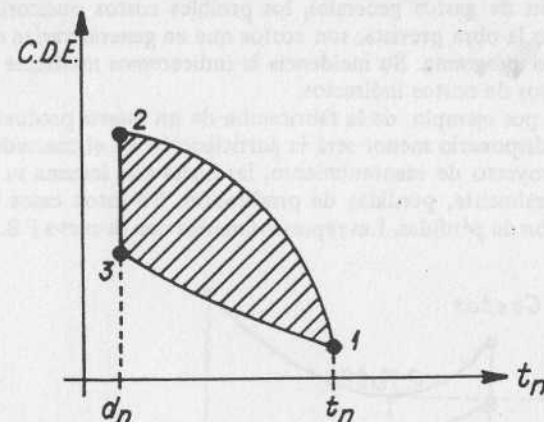
Si no queremos modificar el valor  $t_n$  debemos mantener el valor asignado a las operaciones críticas.

Con respecto a las no críticas podemos actuar de dos maneras diferentes:

a) Supongamos que permitimos su extensión disminuyendo sus márgenes libres. Lograremos así el menor C.D.E. para esa duración total  $t_n$ . Sea  $A'$  el punto representativo.

b) Supongamos que por el contrario reducimos las duraciones hasta sus valores mínimos (crash), es decir, "compramos margen libre". Habremos obtenido así el C.D.E. máximo para dicha duración total  $t_n$ . Sea  $A''$  el punto representativo.

Repitiendo el razonamiento para otras duraciones intermedias, llegaríamos a establecer el dominio de las soluciones posibles, donde la curva 1-3 indicaría el lugar geométrico de las soluciones de costo mínimo para diferentes duraciones totales.



Como podemos estimar bastante bien los puntos 1, 2 y 3, si evolucionamos desde la posición 1, reduciendo el camino crítico, actuando sobre las tareas cuya pendiente de costo sea menor, podremos ir aproximando la curva 1-3, lugar de las soluciones óptimas de los costos directos.

O sea, iremos reduciendo  $t_n$ , eligiendo paso a paso entre las operaciones críticas, aquello que para igual disminución de tiempo produzca el menor aumento de costo. Así iremos acelerando el programa con el mínimo gasto.

Cuando a medida que reduzcamos aparezcan nuevos caminos críticos tendremos que actuar sobre las combinaciones de tareas que situadas sobre caminos críticos paralelos produzcan el menor aumento de costo para una misma reducción del tiempo.

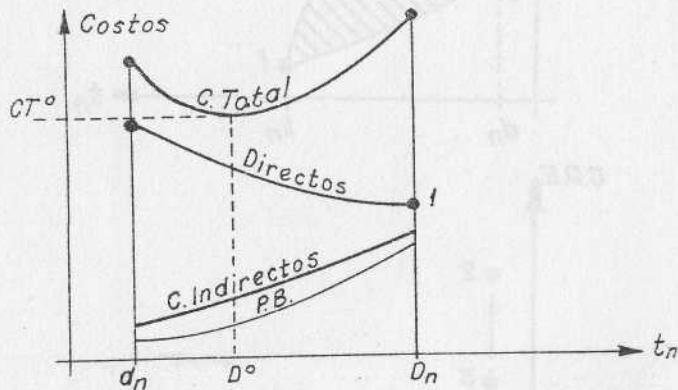
En conocimiento de la curva 1-3, podríamos pensar en la optimización del costo total del programa.

#### Costo total del programa.

Hasta ahora nos hemos referido a costos originados directamente por la realización de cada tarea del proyecto. Evidentemente existen otros gastos de la organización que contribuyen al costo total del programa.

La absorción de gastos generales, los posibles costos punitivos por no cumplir en tiempo la obra prevista, son costos que en general varían en función de la duración del programa. Su incidencia la indicaremos mediante una curva que denominaremos de costos indirectos.

Si se trata, por ejemplo, de la fabricación de un nuevo producto, cuanto más se tarde en disponerlo menor será la participación en el mercado. Cuando se trate de un proyecto de mantenimiento, las horas que insuma su desarrollo significarán, generalmente, pérdidas de producción. En estos casos convendrá estimar una función de pérdidas. Las representaremos con la curva P.B.



En consecuencia obtendremos una curva de costo total que presentaría un óptimo (costo total mínimo),  $CT^o$  para una duración intermedia  $D^o$ .

#### Observación

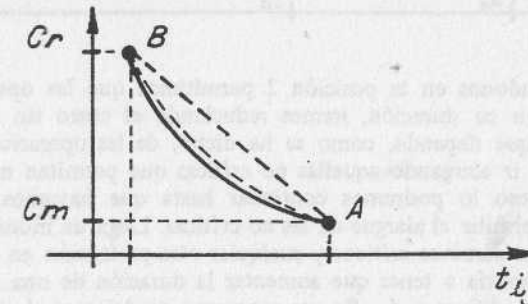
Hemos dicho que existe una relación entre la duración de la tarea y los recursos puestos en juego para realizarla.

Si quisiéramos cuantificarla deberíamos tratar de conocer:

$$t_{ij} = f(c_{ij}) \text{ o su inversa } c_{ij} = \varphi(t_{ij})$$

En ciertos casos, cuando los  $t_{ij}$  se pueden considerar como valores determinados y no aleatorios, la duración de la operación queda determinada para un costo dado.

La curva  $AB$  podría representarse por una serie de segmentos rectilíneos.



Una hipótesis más simplificada, y que por lo tanto nos aleja aún más de la realidad es suponer la variación lineal entre  $A$  y  $B$ .

Para estos casos, existen algoritmos (Kelly y Fulkerson por ejemplo) que nos permitirían determinar el trazado de la curva de las soluciones óptimas (costos directos mínimos), aproximando la curva 1-3 por una curva convexa formada por segmentos rectilíneos. Para una descripción y aplicación de los algoritmos citados remitimos al lector al libro "Método del camino crítico" de A. Kaufmann y G. Desbazeille, y al trabajo de James E. Kelly (jr.), "Critical Path Planning and Scheduling: Mathematical basis" - ORSA - no. 9, 1961. pp. 296 a 300.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [A.1] G. Avondo-Bodino: *Economic applications of the theory of graphs*, Blackie & Son, 1962.
- [B.1] C. Berge: *Théorie des graphes et ses applications*, Dunod, 1958, traducido como "Teoría de las redes" por C.E.C.S.A., México, 1963.
- [F.1] C. Flament: *Théorie des graphes et structures sociales*, Gauthier-Villars, París, 1968.
- [H.1] Hillier-Lieberman: *Introduction to operations research*, Holden, Day, Inc., San Francisco, California, 1967.
- [K.1] A. Kaufmann: *Des points et des flèches... la théorie des graphes*, Dunod, 1970.
- [K.2] A. Kaufmann-G., Desbazeille, *La méthode du chemin critique*, Dunod, 1964, trad. "Método del camino crítico", Sagitario, Barcelona, 1965.
- [K.3] A. Kaufmann, *Méthodes et modèles de la recherche operationnelle*, t. II, Dunod, 1964, traducido por CECSA, México.

|                           |    |
|---------------------------|----|
| Plan de la obra . . . . . | XI |
|---------------------------|----|

*Primera parte - Introducción a la investigación operativa*

|                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------|----|
| La investigación operacional . . . . .                                        | 3  |
| Reseña histórica . . . . .                                                    | 3  |
| Postguerra . . . . .                                                          | 5  |
| Síntesis cronológica . . . . .                                                | 6  |
| La investigación operacional en nuestro país . . . . .                        | 7  |
| La investigación operacional en nuestras universidades . . . . .              | 8  |
| La investigación operacional en la Universidad Nacional de La Plata . . . . . | 8  |
| Algunas definiciones de investigación operacional . . . . .                   | 9  |
| Decisión e investigación operacional . . . . .                                | 9  |
| Situación, problemas . . . . .                                                | 11 |
| Modelos y realidad . . . . .                                                  | 12 |
| Metodología de la investigación operacional . . . . .                         | 13 |
| La investigación operacional y las actividades humanas . . . . .              | 15 |
| Referencias bibliográficas . . . . .                                          | 17 |

*Segunda parte - Grafes-Algunas aplicaciones*

|                                                 |    |
|-------------------------------------------------|----|
| Capítulo 1 - Nociones sobre grafes . . . . .    | 21 |
| A modo de introducción . . . . .                | 21 |
| Nociones sobre grafes . . . . .                 | 22 |
| Representación de un grafe . . . . .            | 22 |
| Aplicación multívoca . . . . .                  | 23 |
| Elementos del grafe . . . . .                   | 24 |
| Notación . . . . .                              | 24 |
| Grafe parcial . . . . .                         | 24 |
| Subgrafe . . . . .                              | 25 |
| Subgrafe parcial . . . . .                      | 25 |
| Grafe pleno . . . . .                           | 26 |
| Grafe complementario de un grafe dado . . . . . | 26 |
| Camino . . . . .                                | 27 |
| Circuito . . . . .                              | 27 |
| Bucle . . . . .                                 | 27 |
| Longitud de un camino . . . . .                 | 27 |
| Arborescencia . . . . .                         | 28 |
| Arista . . . . .                                | 28 |
| Cadena . . . . .                                | 29 |
| Ciclo . . . . .                                 | 29 |
| Grafe conexo . . . . .                          | 29 |

|                                                                      |    |
|----------------------------------------------------------------------|----|
| Grafes no orientados .....                                           | 29 |
| Arbol .....                                                          | 31 |
| Arbol parcial de un grafo no orientado .....                         | 31 |
| Red de transporte .....                                              | 32 |
| Representación simplificada .....                                    | 34 |
| Capítulo 2 - Camino económico .....                                  | 37 |
| Algunas aplicaciones .....                                           | 37 |
| Solución del problema por el algoritmo de Ford .....                 | 38 |
| Aplicación al ejemplo .....                                          | 40 |
| Ejercicio propuesto .....                                            | 42 |
| Otra forma de resolución .....                                       | 42 |
| Ejercicio .....                                                      | 44 |
| Otro ejemplo .....                                                   | 44 |
| Caso de maximización .....                                           | 46 |
| Forma de resolución .....                                            | 46 |
| Algoritmo .....                                                      | 47 |
| Ejercicio .....                                                      | 49 |
| Otra forma de resolverlo .....                                       | 49 |
| Capítulo 3 - Camino de longitud óptima .....                         | 51 |
| Camino de longitud mínima .....                                      | 51 |
| Aclaración .....                                                     | 55 |
| Ejercicio .....                                                      | 56 |
| Camino de longitud máxima .....                                      | 56 |
| Ejercicio .....                                                      | 57 |
| Capítulo 4 - Arbol de conexión .....                                 | 59 |
| Arbol mínimo de conexión .....                                       | 61 |
| Ejercicio .....                                                      | 63 |
| Solución por medio del algoritmo de Kruskal .....                    | 63 |
| Ejercicio I y II .....                                               | 65 |
| Ejercicio III .....                                                  | 66 |
| Arbol máximo de conexión .....                                       | 67 |
| Capítulo 5 - Flujo a través de una red de transporte .....           | 71 |
| Capacidad del arco $c(u)$ .....                                      | 72 |
| Flujo a través de un arco: $\varphi(u)$ .....                        | 72 |
| Subconjuntos de arcos asociados a cada vértice .....                 | 72 |
| Conservación del flujo .....                                         | 73 |
| Flujo total: $F$ .....                                               | 73 |
| Objetivo: $F^o$ .....                                                | 74 |
| 1) Lograr un flujo completo .....                                    | 76 |
| 2) Optimizarlo .....                                                 | 79 |
| Procedimiento resumido .....                                         | 82 |
| Aclaraciones previas .....                                           | 82 |
| Aplicación del procedimiento resumido .....                          | 84 |
| Corte de una red .....                                               | 88 |
| Capítulo 6 - Administración de proyectos por análisis de redes ..... | 95 |
| Introducción a la planificación y programación .....                 | 95 |

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. Planificación .....                                                       | 97  |
| 1. Listado de tareas .....                                                   | 97  |
| 2. Se establece el orden lógico de realización .....                         | 97  |
| 3. Elementos del diagrama de flechas .....                                   | 98  |
| 4. Definición del acontecimiento .....                                       | 98  |
| 5. Tarea o actividad .....                                                   | 98  |
| 6. Representación gráfica y simbólica de actividades y acontecimientos ..... | 98  |
| 7. Reglas fundamentales a observar .....                                     | 99  |
| 8. Reglas convenientes de observar .....                                     | 100 |
| 9. Uso de actividades ficticias .....                                        | 100 |
| 10. Construcción de la red .....                                             | 101 |
| 10.1 Uso del diagrama de precedencias .....                                  | 102 |
| 10.2 Trazado de la red .....                                                 | 102 |
| 11. Numeración de los acontecimientos (Regla de Fulkerson) ..                | 103 |
| 12. Cálculo del camino crítico .....                                         | 105 |
| 12.1 Cuenta ascendente .....                                                 | 105 |
| 12.2 Cuenta descendente .....                                                | 107 |
| 13. Reglas prácticas para el cálculo de los $t^0$ y $t^1$ .....              | 109 |
| 14. Indicadores de errores .....                                             | 110 |
| 15. Nodos del camino crítico .....                                           | 110 |
| 16. Tareas del camino crítico .....                                          | 110 |
| 17. Observación .....                                                        | 111 |
| 18. Error frecuente .....                                                    | 112 |
| II. Programación .....                                                       | 113 |
| 19. Concepto .....                                                           | 113 |
| 20. Slacks de los nodos .....                                                | 113 |
| 21. Confección del programa .....                                            | 114 |
| 22. Reglas a observar .....                                                  | 114 |
| 23. Reglas convenientes de observar .....                                    | 114 |
| 24. Aplicación .....                                                         | 114 |
| 25. Resumen .....                                                            | 116 |
| 26. Factibilidad .....                                                       | 116 |
| III. Control .....                                                           | 117 |
| 27. Concepto .....                                                           | 117 |
| Resumen del proceso .....                                                    | 118 |
| Anexo 1 .....                                                                | 119 |
| Márgenes y slacks .....                                                      | 119 |
| Slacks .....                                                                 | 119 |
| Expresiones simbólicas para márgenes de tareas y slack de nodos ..           | 119 |
| Utilidad de los márgenes .....                                               | 121 |
| Diferencia entre las fechas de las tareas y de los nodos .....               | 121 |
| Anexo 2 .....                                                                | 123 |
| Duración de las tareas: su estimación .....                                  | 123 |
| Anexo 3 .....                                                                | 125 |
| Probabilidad asociada a las fechas programadas .....                         | 125 |

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| Aplicación . . . . .                           | 127 |
| Finalización de tareas . . . . .               | 128 |
| Síntesis . . . . .                             | 129 |
| Anexo 4 . . . . .                              | 129 |
| Costos asociados . . . . .                     | 129 |
| Introducción . . . . .                         | 129 |
| Generalidades . . . . .                        | 130 |
| Relaciones entre $t_{ij}$ y $c_{ij}$ . . . . . | 130 |
| Costo directo esperado del programa . . . . .  | 131 |
| Costo total del programa . . . . .             | 134 |
| Observación . . . . .                          | 135 |
| Referencias bibliográficas . . . . .           | 136 |

Este libro se terminó de imprimir  
el día 13 de setiembre de 1976,  
en los talleres gráficos de  
LA PRENSA MÉDICA ARGENTINA, S. R. L.  
Junín 845 - Buenos Aires.